Контрольная работа
Вариант 2

Задача 1. Заданы множества A, B и C. Считать, что элементы этих множеств образуют универсальное множество U. Найти $\overline{A+B+C}$, $P(A\cap B\cap C)$, проверить равенство $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
$A=\{k,f,i,h,g,d\}$, $B=\{c,k,i,b,e,f\}$, $C=\{b,a,f,g,h,k,i\}$.

Решение. Сначала найдем универсальное множество $U=A\cup B\cup C$:
$U=A\cup B\cup C=\{k,f,i,h,g,d\}\cup\{c,k,i,b,e,f\}\cup\{b,a,f,g,h,k,i\}=$
$=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,k\}$

Найдем множество $\overline{A+B+C}$ (+ обозначает симметрическую разность):
$\overline{A+B+C}=\overline{(\{k,f,i,h,g,d\}+\{c,k,i,b,e,f\})+\{b,a,f,g,h,k,i\}}=$
$=\overline{\{h,g,d,c,b,e\}+\{b,a,f,g,h,k,i\}}=\overline{\{d,c,e,a,f,k,i\}}=U\setminus\{d,c,e,a,f,k,i\}=$
$=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,k\}\setminus\{d,c,e,a,f,k,i\}=\{b,g,h\}$.

Найдем множество всех подмножеств $P(A\cap B\cap C)$. Для этого сначала найдем само множество $(A\cap B\cap C)$:
$(A\cap B\cap C)=\{k,f,i,h,g,d\}\cap\{c,k,i,b,e,f\}\cap\{b,a,f,g,h,k,i\}=$
$=\{k,f,i\}\cap\{b,a,f,g,h,k,i\}=\{k,f,i\}$.
Составляем множество подмножеств, в котором будет $2^3=8$ элементов:
$P(A\cap B\cap C)=P(\{k,f,i\})=\{\{\varnothing\},\{k\},\{f\},\{i\},\{k,f\},\{k,i\},\{f,i\},\{k,f,i\}\}$.

Для проверки равенства $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ сравним множества L и R, соответственно левую и правую часть этого выражения.
Получаем:
$L=(A\cup B)\cap C=(\{k,f,i,h,g,d\}\cup\{c,k,i,b,e,f\})\cap\{b,a,f,g,h,k,i\}=$
$=\{k,f,i,h,g,d,c,b,e\}\cap\{b,a,f,g,h,k,i\}=\{h,k,i,b,f,g\}$
$R=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(\{k,f,i,h,g,d\}\cap\{b,a,f,g,h,k,i\})\cup(\{c,k,i,b,e,f\}\cap\{b,a,f,g,h,k,i\})=$
$=(\{k,f,i,h,g\})\cup(\{k,i,b,f\})=\{k,f,i,h,g,b\}$
Согласно принципу объемности $L=R$, равенство доказано.

Задача 2. Доказать тождества.
$(A\setminus(B\cup C))=(A\setminus B)\setminus C$.

Решение.
Шаг 1. Покажем включение $(A\setminus(B\cup C))\subseteq(A\setminus B)\setminus C$. Пусть $x\in(A\setminus(B\cup C))$. Тогда $x\in A$ и $x\notin(B\cup C)$, то есть Тогда $x\in A$ и $x\notin B$ и $x\notin C$. Так как $x\in A$ и $x\notin B$, то $x\in A\setminus B$. Так как $x\in A$ и $x\notin B$ и $x\notin C$, то $x\in A\setminus B$ и $x\notin C$, то есть $x\in(A\setminus B)\setminus C$.

Шаг 2. Покажем включение $(A\setminus(B\cup C))\supseteq(A\setminus B)\setminus C$. Пусть $x\in(A\setminus B)\setminus C$. Тогда $x\in A\setminus B$ и $x\notin C$, то есть $x\in A$ и $x\notin B$ и $x\notin C$, то есть $x\in A$ и $x\notin(B\cup C)$, то есть $x\in(A\setminus(B\cup C))$.

Шаг 3. Поскольку выполняются включения $(A\setminus(B\cup C))\subseteq(A\setminus B)\setminus C$ и $(A\setminus(B\cup C))\supseteq(A\setminus B)\setminus C$, то $(A\setminus(B\cup C))=(A\setminus B)\setminus C$.

Задача 3. Дано фактор-множество X/ρ. Найти отношение эквивалентности ρ, определенное на множестве X.
$\{\{k,h\},\{c,i,e\},\{b,a,f,g\}\}$.

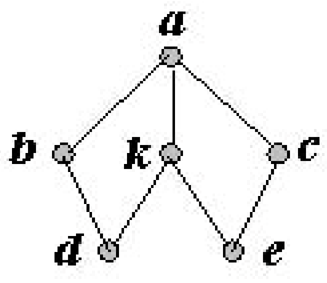
Решение.

1) Множество $X=\{k,h,c,i,e,b,a,f,g\}=\{a,b,c,e,f,g,h,k,i\}$.
2) Так как ρ отношение эквивалентности, то оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Согласно определению фактор-множества, подмножества $[k]=\{k,h\}$, $[c]=\{c,i,e\}$, $[b]=\{b,a,f,g\}$ множества X являются классами эквивалентности по отношению ρ.
3) Исходя из определения классов эквивалентности, строим множество ρ:

$$\rho=\{<k,k>,<k,h>,<h,k>,<h,h>,<c,c>,<c,i>,<c,e>,<i,i>,$$
$$<i,c>,<i,e>,<e,c,>,<e,i>,<e,e>,<b,b>,<b,a>,<b,f>,<b,g>,$$
$$<a,b,>,<a,a>,<a,f>,<a,g>,<f,b>,<f,a>,<f,f>,<f,g>,$$
$$<g,b>,<g,a>,<g,f>,<g,g>\}$$

Задача 4. Дано частично упорядоченное множество $X=\{a,b,c,d,e,k\}$, структура которого задана диаграммой Хассе. Найти отношение частичного порядка ρ, соответствующее приведенной диаграмме.

2.

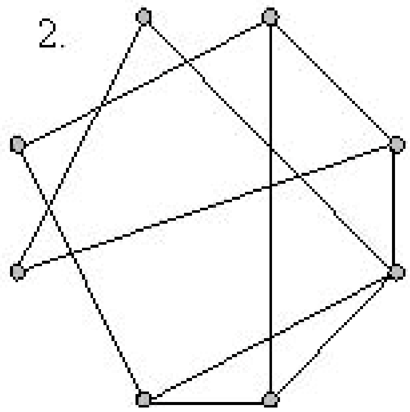


Решение. Пусть ρ - бинарное отношение «предшествует». Согласно определению диаграммы Хассе, элементы частично упорядоченного множества X, расположенные в нижней части диаграммы «предшествуют» тем, что расположены на диаграмме выше, если только они соединены отрезком или несколькими отрезками, образующими цепь. Это следует из свойств рефлексивности, антисимметричности и транзитивности ρ частичного упорядоченного множества.

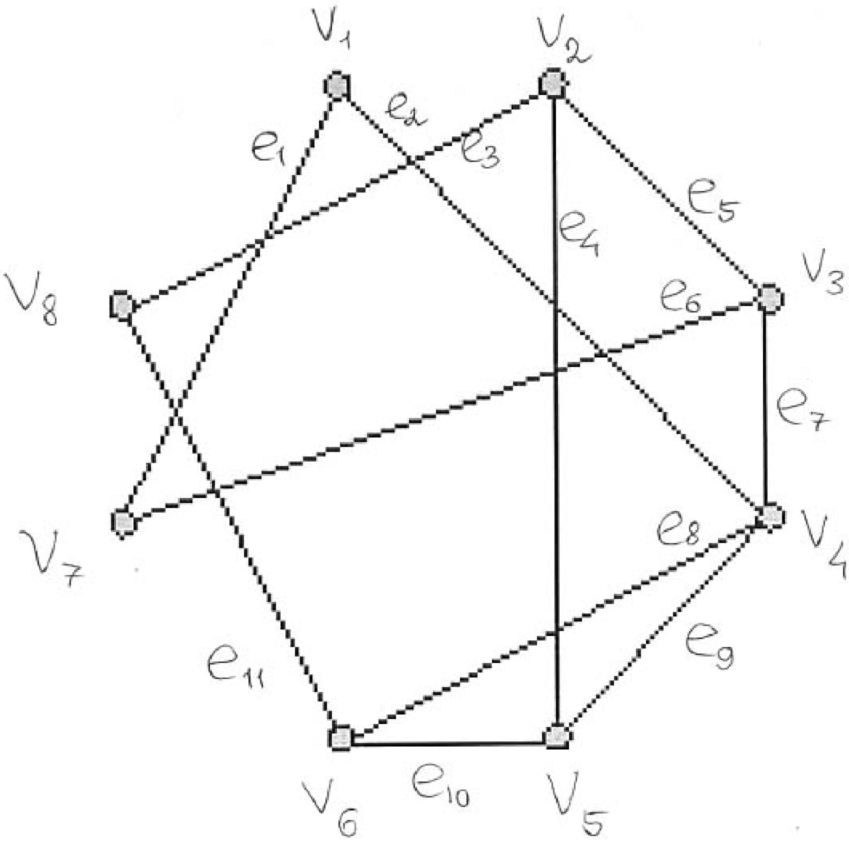
Строим согласно этому определению множество ρ:

$$\rho = \{<d,d>, <d,b>, <d,k>, <d,a>, <b,b>, <k,k>, <k,a>,$$
$$<b,a>, <e,e>, <e,k>, <e,c>, <e,a>, <c,a>, <c,c>, <a,a>\}$$

Задача 5. Связный граф G задан графически. Выполнить следующее:
А) записать матрицы инцидентности и смежности;
Б) найти центры графа, радиус графа;
В) найти диаметры графа;
Г) определить цикломатическое число графа.



Решение. А) Чтобы найти матрицы инцидентности и смежности, обозначим вершины графа $v_1,...,v_8$ и ребра графа $e_1,...,e_{11}$:



Так как количество ребер графа равно 11, а число вершин равно 8, то матрица инцидентности $B(G)$ будет иметь размерность 11*8. Эта матрица состоит из 0 и 1. В i-ой строке ставим единицу в тех столбцах, в которых соответствующие вершины инцидентны ребру e_i, в остальных столбцах ставим нули. Получаем матрицу:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
e1	1	0	0	0	0	0	1	0
e2	1	0	0	1	0	0	0	0
e3	0	1	0	0	0	0	0	1
e4	0	1	0	0	1	0	0	0
e5	0	1	1	0	0	0	0	0
e6	0	0	1	0	0	0	1	0
e7	0	0	1	1	0	0	0	0
e8	0	0	0	1	0	1	0	0
e9	0	0	0	1	1	0	0	0
e10	0	0	0	0	1	1	0	0
e11	0	0	0	0	0	1	0	1

Найдем матрицу смежности графа $A(G)$, это квадратная матрица порядка 8. Она состоит из нулей и единиц. Единицы располагаются в местах пересечения строк и столбцов, соответствующих смежным вершинам, в остальных местах расположены нули. Получаем:

v1 v2 v3 v4 v5 v6 v7 v8

v1	0	0	0	1	0	0	1	0
v2	0	0	1	0	1	0	0	1
v3	0	1	0	1	0	0	1	0
v4	1	0	1	0	1	1	0	0
v5	0	1	0	1	0	1	0	0
v6	0	0	0	1	1	0	0	1
v7	1	0	1	0	0	0	0	0
v8	0	1	0	0	0	1	0	0

Б) Найдем центры графа, радиус графа. Для этого составим матрицу $D(G)$ расстояний между вершинами графа. Элементы матрицы d_{ij} - расстояние между вершинами v_i и v_j. Получаем:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
v1	0	3	2	1	2	2	1	3
v2	3	0	1	2	1	2	2	1
v3	2	1	0	1	2	2	1	2
v4	1	2	1	0	1	1	2	2
v5	2	1	2	1	0	1	3	2
v6	2	2	2	1	1	0	3	1
v7	1	2	1	2	3	3	0	3
v8	3	1	2	2	2	1	3	0

С помощью этой матрицы для каждой вершины графа G определим наибольшее удаление по формуле: $r(v_i)=\max\limits_j d_{ij}$, $i,j=1,...,8$. Получаем:

$r(v_1)=\max\{0,3,2,1,2,2,1,3\}=3$,

$r(v_2)=\max\{3,0,1,2,1,2,2,1\}=3$,

$r(v_3)=\max\{2,1,0,1,2,2,1,2\}=2$,

$r(v_4)=\max\{1,2,1,0,1,1,2,2\}=2$,

$r(v_5)=\max\{2,1,2,1,0,1,3,2\}=3$,

$r(v_6)=\max\{2,2,2,1,1,0,3,1\}=3$,

$r(v_7)=\max\{1,2,1,2,3,3,0,3\}=3$,

$r(v_8)=\max\{3,1,2,2,2,1,3,0\}=3$.

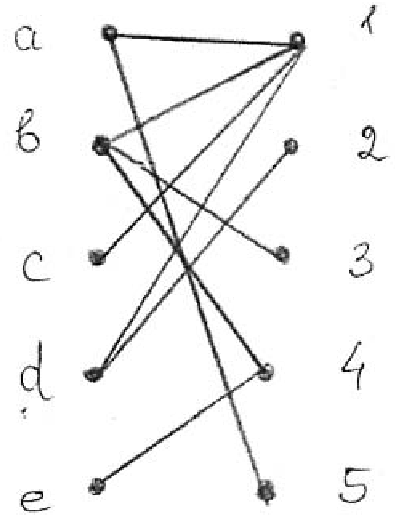
Радиус графа равен $r(G)=\min\limits_i r(v_i)=2$. Центрами графа будут вершины, для которых $r(v_i)=2$, то есть множество вершин: $\{v_3,v_4\}$

В) Найдем диаметр графа $d(G)=\max\limits_{v,w\in G} d(v,w)$. Из матрицы видно, что диаметр графа равен 3. Можно выделить пять пар вершин, расстояние между которыми равно 3: $(v_1,v_2),(v_1,v_8),(v_5,v_7),(v_6,v_7),(v_7,v_8)$.

Г) Определим цикломатическое число графа по формуле $\lambda(G) = 1 + m(G) - n(G)$, где $m(G) = 11$ - число ребер, $n(G) = 8$ - число вершин. Получаем: $\lambda(G) = 1 + 11 - 8 = 4$.

Задача 6. Найти наибольшее паросочетание в графе $S_i = (V_1, V_2, E_i)$, где $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, E_i - заданы в зависимости от варианта.
$E_2 = \{\{a,1\}, \{a,5\}, \{b,1\}, \{b,3\}, \{b,4\}, \{c,1\}, \{d,1\}, \{d,2\}, \{e,4\}\}$.

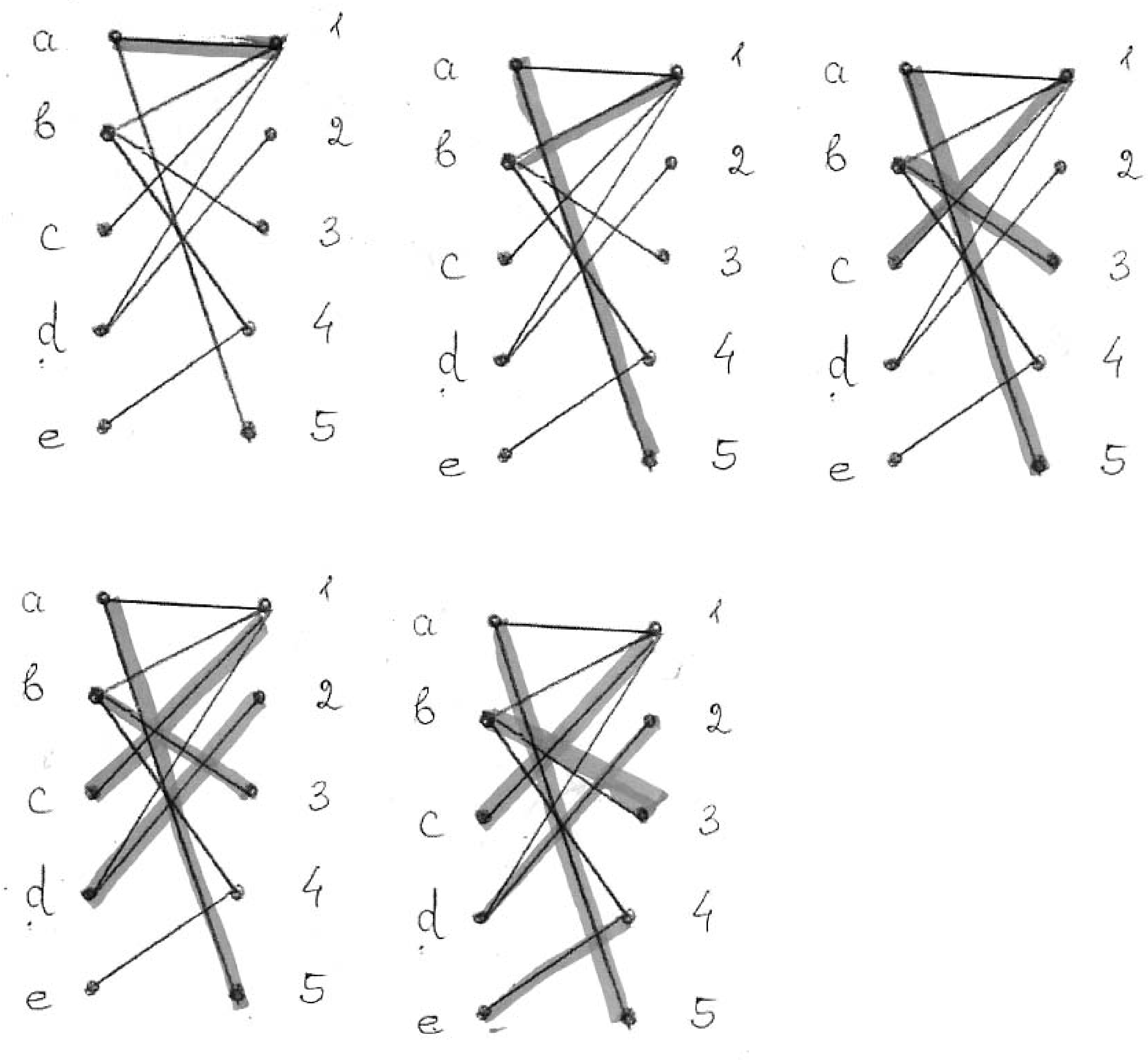
Решение. Строим исходный граф S_2:



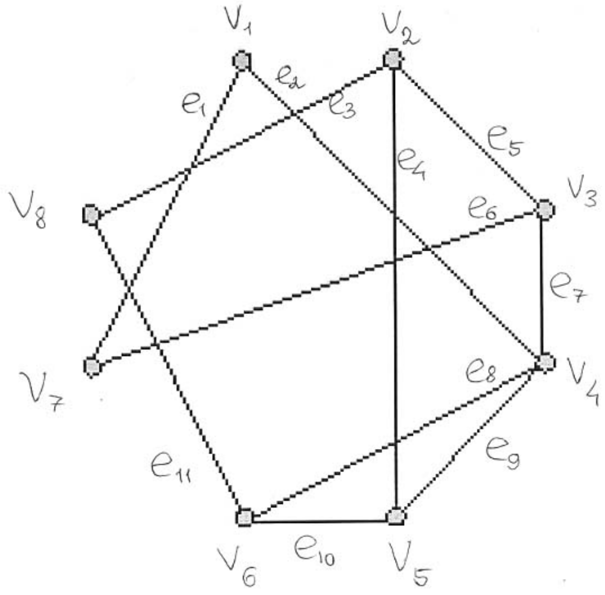
1) Выберем исходное паросочетание, например $R_1 = \{\{a\}, \{1\}, \{a,1\}\}$
2) Выбираем вершину $u \in U, u \notin R_1$. Пусть $u = b$. Строим чередующуюся цепь с началом в вершине b: $b1a5$ и толстым ребром $(b,1)$. Заменяем толстые ребра на тонкие и наоборот. Получаем новое паросочетание $R_2 = \{\{a,b\}, \{1,5\}, \{a,5\}, \{b,1\}\}$.
3) Выбираем вершину $u \in U, u \notin R_2$. Пусть $u = c$. Строим чередующуюся цепь с началом в вершине c: $c1b3$ и толстым ребром $(b,1)$. Заменяем толстые ребра на тонкие и наоборот. Получаем новое паросочетание $R_3 = \{\{a,b,c\}, \{1,3,5\}, \{a,5\}, \{b,3\}, \{c,1\}\}$.
4) Выбираем вершину $u \in U, u \notin R_3$. Пусть $u = d$. Строим чередующуюся цепь с началом в вершине d: такой цепи нет. Добавляем ребро $(d,2)$, не нарушающее паросочетание. Получаем новое паросочетание $R_4 = \{\{a,b,c,d\}, \{1,2,3,5\}, \{a,5\}, \{b,3\}, \{c,1\}, \{d,2\}\}$.
5) Выбираем вершину $u \in U, u \notin R_4$. Пусть $u = e$. Строим чередующуюся цепь с началом в вершине e: такой цепи нет. Добавляем ребро $(e,4)$, не нарушающее паросочетание. Получаем новое паросочетание $R_5 = \{\{a,b,c,d,e\}, \{1,2,3,4,5\}, \{a,5\}, \{b,3\}, \{c,1\}, \{d,2\}, \{e,4\}\}$.

Найденное паросочетание является наибольшим, так как больше увеличителей нет.

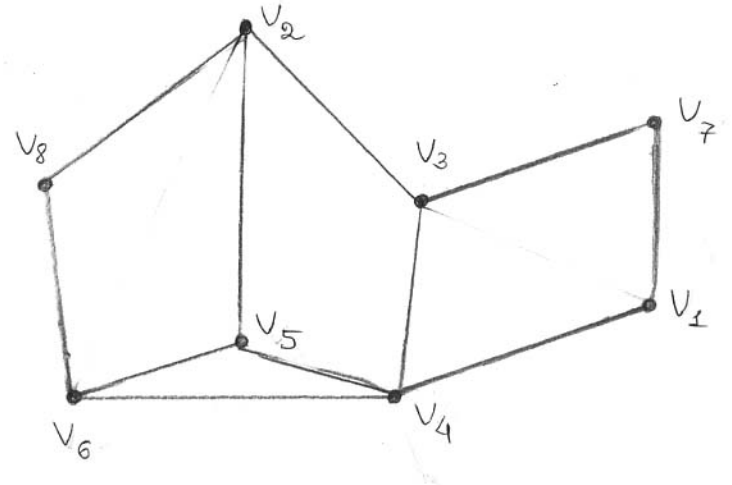
Проиллюстрируем все этапы нахождения паросочетания (с 1 по 5).



Задача 7. Проверить граф G_i, $i = 1, 2, ..., 10$ из задачи 5 на планарность.

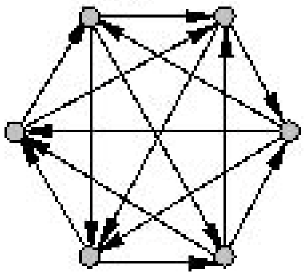


Решение. Граф является планарным. Покажем это, расположив его на плоскости:

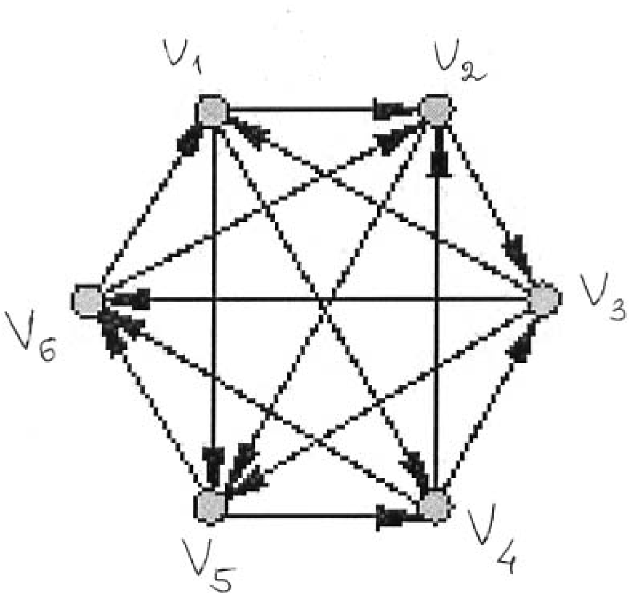


Задача 8. В орграфе D определить наибольшее количество путей с общим началом и общим концом, длина которых не превосходит трех.

2.



Решение. Обозначим вершины графа и составим матрицу смежности:



Матрица смежности графа $A(G)$:

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	1	0	1	1	0
v2	0	0	1	0	1	0
v3	1	0	0	0	1	1
v4	0	1	1	0	0	1
v5	0	0	0	1	0	1
v6	1	1	0	0	0	0

Вычисляем квадрат и куб этой матрицы:

$A^2(G) =$

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	1	2	1	1	2
v2	1	0	0	1	1	2
v3	1	2	0	2	1	1
v4	2	1	1	0	2	1
v5	1	2	1	0	0	1
v6	0	1	1	1	2	0

$A^3(G) =$

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	4	3	2	1	3	4
v2	2	4	1	2	1	2
v3	1	4	4	2	3	3
v4	2	3	1	4	4	3

v5	2	2	2	1	4	1
v6	1	1	2	2	2	4

Количество путей из вершины v_i в вершину v_j, длина которых не превосходит трех, определяется элементом d_{ij} матрицы $D = A(G) + A^2(G) + A^3(G)$. Вычисляем эту матрицу:

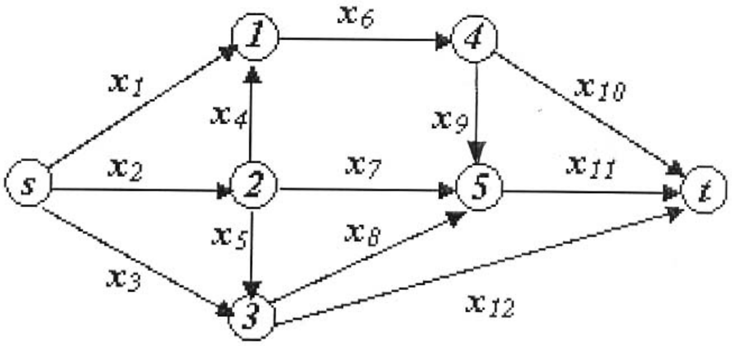
4	5	4	3	5	6
3	4	2	3	3	4
3	6	4	4	5	5
4	5	3	4	6	5
3	4	3	2	4	3
2	3	3	3	4	4

Наибольшее число путей равно 6, это пути связывающие пары вершин (v_3, v_2), (v_4, v_5) и (v_1, v_6).

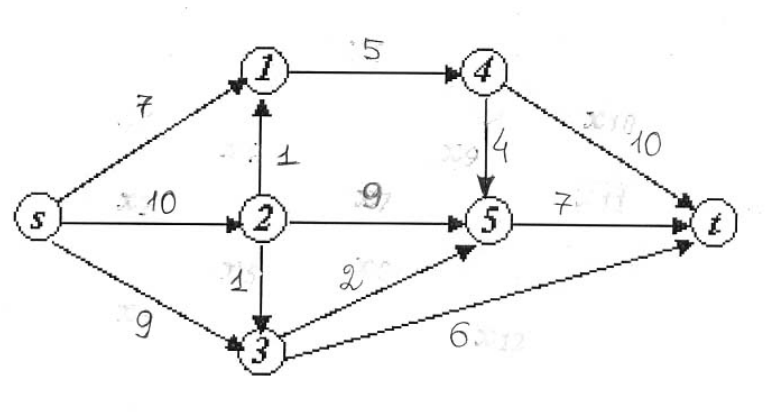
Найдем для примера все 6 путей, связывающих вершины v_3 и v_2. Это пути:
(v_3, v_6, v_2), (v_3, v_1, v_2), (v_3, v_6, v_1, v_2), (v_3, v_5, v_6, v_2), (v_3, v_5, v_4, v_2), (v_3, v_1, v_4, v_2)

Задача 9. Найти максимальный поток $f(x_i)$ в транспортной сети $T = (V, X, s, t, c, f)$, где $V = \{s, t, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $x = \{x_1, ..., x_{12}\}$, отношение инцидентности задается списком:
$x_1 = (s, v_1)$, $x_2 = (s, v_2)$, $x_3 = (s, v_3)$, $x_4 = (v_2, v_1)$, $x_5 = (v_2, v_3)$, $x_6 = (v_1, v_4)$, $x_7 = (v_2, v_5)$, $x_8 = (v_3, v_5)$, $x_9 = (v_4, v_5)$, $x_{10} = (v_4, t)$, $x_{11} = (v_5, t)$, $x_{12} = (v_3, t)$;
пропускная способность сети равна $c_i = c(x_i)$. Значения пропускной способности дуг приведены в таблице:

$c_1 = 7$, $c_2 = 10$, $c_3 = 9$, $c_4 = 1$, $c_5 = 1$, $c_6 = 5$, $c_7 = 9$, $c_8 = 2$, $c_9 = 4$, $c_{10} = 10$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 6$.



Решение. Расставляем пропускные способности ребер.



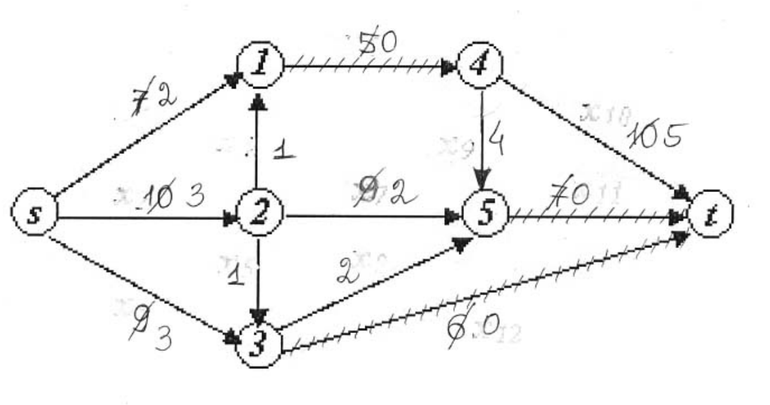
Исходим из начального нулевого потока $f_0(x_i)=0,\ i=1,...,12$.

Перебираем все возможные простые цепи с дугами прямой направленности из источника s в сток t, по которым возможно увеличение потока:

1) Цепь $s-1-4-t$, минимальная пропускная способность равна потоку через эту цепь и равна 5, дуга (1-4) насыщается.

2) Цепь $s-2-5-t$, минимальная пропускная способность равна потоку через эту цепь и равна 7, дуга (5-t) насыщается.

3) Цепь $s-3-t$, минимальная пропускная способность равна потоку через эту цепь и равна 6, дуга (3-t) насыщается.

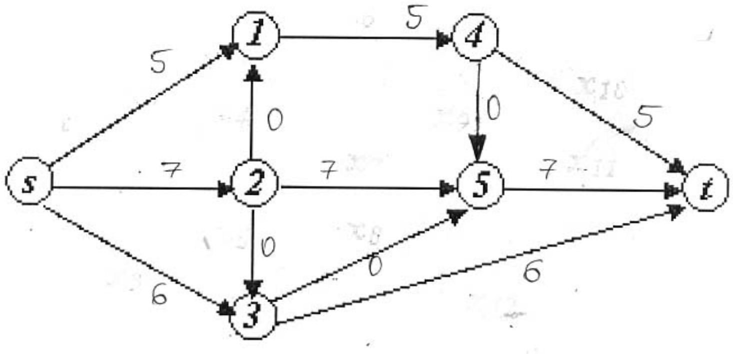


Больше простых цепей прямой направленности, допускающих увеличение потока, нет. Суммарный поток составляет $f=5+7+6=18$.

Дальнейшее увеличение потока возможно только за счет перераспределения потока с учетом дуг обратного направления.

Все прямые цепи в сети включают насыщенные дуги прямой направленности. Все дуги обратной направленности (дуга 4-5) имеют нулевой поток. Поэтому по теореме 3,2 поток не может быть дальше увеличен, он максимален.

Таким образом, максимальная величина потока $f=18$. Поток изображен ниже:


s
1
2
3
4
5
t
5
7
6
0
0
5
7
0
6
0
5
7