Контрольная работа по линейной алгебре

Задача №1. Решить уравнение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & 4 & 3 \\ 2 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ x & 4 & 3 \\ 2 & 6 & x \end{vmatrix} = 4x + 42x - 12 - 56 + 2x^2 - 18 = 2x^2 + 46x - 86 = 2(x^2 + 23x - 43)$$

$$x^2 + 23x - 43 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-43) = 529 + 172 = 701$$

$$x_1 = \frac{-23 - \sqrt{701}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-23 + \sqrt{701}}{2}$$

Задача №2. Решить матричное уравнение.

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 16$$

Найдем алгебраические дополнения.

$A_{11}=6 \quad A_{21}=-1$

$A_{12}=-2 \quad A_{22}=3$

$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}6 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

$X=A^{-1}B=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}6 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ 9 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}18-9 & -24-1\\ -6+27 & 8+3\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}9 & -25\\ 21 & 11\end{pmatrix}$

б) $X\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

Решение.

$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$XA=B$

$XAA^{-1}=BA^{-1}$

$XE=BA^{-1}$

$X=BA^{-1}$

Найдем обратную матрицу.

$|A|=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 7 & 3\end{vmatrix}=-12-7=-19$

Найдем алгебраические дополнения.

$A_{11}=3 \quad A_{21}=-1$

$A_{12}=-7 \quad A_{22}=-4$

$A^{-1}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -7 & -4\end{pmatrix}$

$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -7 & -4\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -7 & -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}3-63 & -1-36\\ 0+14 & 0+8\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-60 & -37\\ 14 & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}60 & 37\\ -14 & -8\end{pmatrix}$

Задача №3. Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x+y-2z=9\\ x+3y+2z=18\\ 6x+6y-z=33\end{cases}$$

Решение.
Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 18 \\ 6 & 6 & -1 & 33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 18 \\ 2 & 1 & -2 & 9 \\ 6 & 6 & -1 & 33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \\ 0 & -12 & -13 & -75 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & -6 & -27 \\ 0 & 0 & 7 & -51 \end{array}\right)$$

(1) Поменяли местами 1-ю и 2-ю строки.
(2) Из 2-й строки вычли 1-ю, умноженную на 2. Из 3-й строки вычли 1-ю, умноженную на 6.
(3) Из 3-й строки, умноженной на 5, вычли 2-ю, умноженную на 12.

Запишем эквивалентную систему уравнений.

$$\begin{cases} x+3y+2z=18 \\ -5y-6z=-27 \\ 7z=-51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+2\cdot\left(-\dfrac{51}{7}\right)=18 \\ -5y-6\cdot\left(-\dfrac{51}{7}\right)=-27 \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-\dfrac{102}{7}=18 \\ -5y+\dfrac{306}{7}=-27 \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=18+\dfrac{102}{7} \\ -5y=-27-\dfrac{306}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=\dfrac{228}{7} \\ -5y=-\dfrac{495}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=\dfrac{228}{7} \\ y=\dfrac{99}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3\cdot\dfrac{99}{7}=\dfrac{228}{7} \\ y=\dfrac{99}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{297}{7}=\dfrac{228}{7} \\ y=\dfrac{99}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{69}{7} \\ y=\dfrac{99}{7} \\ z=-\dfrac{51}{7} \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot\left(-\dfrac{69}{7}\right)+\dfrac{99}{7}-2\cdot\left(-\dfrac{51}{7}\right)=9 \\ -\dfrac{69}{7}+3\cdot\dfrac{99}{7}+2\cdot\left(-\dfrac{51}{7}\right)=18 \\ 6\cdot\left(-\dfrac{69}{7}\right)+6\cdot\dfrac{99}{7}-\left(-\dfrac{51}{7}\right)=33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{138}{7}+\frac{99}{7}+\frac{102}{7}=9 \\ -\frac{69}{7}+\frac{297}{7}-\frac{102}{7}=18 \\ -\frac{414}{7}+\frac{594}{7}+\frac{51}{7}=33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{63}{7}=9 \\ \frac{126}{7}=18 \\ \frac{231}{7}=33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9=9 \\ 18=18 \\ 33=33 \end{cases}$$

Решение верное.

Ответ:

$$x=-\frac{69}{7};\, y=\frac{99}{7};\; z=-\frac{51}{7}$$

Задача №4. Решить СЛУ методом Крамера.

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 3x+4y-z=12 \\ 9x+5y-3z=22 \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель главной матрицы системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-12+18+45-108-18+5=-70$$

Найдем определители, заменив каждый из столбцов столбцом свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & -1 \\ 22 & 5 & -3 \end{vmatrix}=-48+180+44-264-72+20=-140$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 12 & -1 \\ 9 & 22 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 198 - 36 - 324 + 22 + 36 = -140$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 22 \end{vmatrix} = 88 + 60 - 216 - 144 - 60 + 132 = -140$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-140}{-70} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-140}{-70} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-140}{-70} = 2$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2 - 4 + 6 = 4 \\ 6 + 8 - 2 = 12 \\ 18 + 10 - 6 = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 4 \\ 12 = 12 \\ 22 = 22 \end{cases}$$

Ответ: $x = 2;\ y = 2;\ z = 2$

Задача №5. Решить СЛУ методом матричного исчисления (при помощи обратной матрицы).

$$\begin{cases} 7x - 5y = 30 \\ 4x + 11y = 31 \\ 2x + 3y + 4z = 21 \end{cases}$$

Решение.

Главная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix}30\\31\\21\end{pmatrix}$$

Решение.

$$AX=B$$

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$EX=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу.

$$|A|=\begin{vmatrix}7&-5&0\\4&11&0\\2&3&4\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}7&-5\\4&11\end{vmatrix}=4\cdot(77+20)=388$$

Найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}11&0\\3&4\end{vmatrix}=44 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-5&0\\3&4\end{vmatrix}=20 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-5&0\\11&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4&0\\2&4\end{vmatrix}=-16 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}7&0\\2&4\end{vmatrix}=28 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}7&0\\4&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4&11\\2&3\end{vmatrix}=12-22=-10 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}7&-5\\2&3\end{vmatrix}=-(21+10)=-31 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}7&-5\\4&11\end{vmatrix}=77+20=97$$

$$A^{-1}=\frac{1}{388}\begin{pmatrix}44&20&0\\-16&28&0\\-10&-31&97\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{388}\begin{pmatrix}44&20&0\\-16&28&0\\-10&-31&97\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\31\\21\end{pmatrix}=\frac{1}{388}\begin{pmatrix}1320+620+0\\-480+868+0\\-300-961+2037\end{pmatrix}=\frac{1}{388}\begin{pmatrix}1940\\388\\776\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{cases}35-5=30\\20+11=31\\10+3+8=21\end{cases} \qquad \begin{cases}30=30\\31=31\\21=21\end{cases}$$

Ответ: $x=5;\ y=1;\ z=2$

Задача №6. Вычислить определители третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель разложением по первой строке. Получаем:

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & x \\ x & c \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x \\ x & c \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & b \\ x & x \end{vmatrix} =$$

$$= a(bc - x^2) - x(cx - x^2) + x(x^2 - bx) =$$

$$= abc - ax^2 - cx^2 + x^3 + x^3 - bx^2 =$$

$$= abc - x^2(a+b+c) + 2x^3.$$

Задача №7. Используя различные методы, вычислить определители.

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель, предварительно упростив его.

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ 0 & x-b & c-x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & x \\ x-b & c-x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x \\ x-b & c-x \end{vmatrix} =$$

$$= a(bc - bx - x^2 + bx) - x(cx - x^2 - x^2 + bx) =$$

$$= abc - ax^2 - cx^2 + x^3 + x^3 - bx^2 =$$

$$= abc - x^2(a+b+c) + 2x^3.$$

Задача №8. Найти общее решение систем уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 12 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Расширенную матрицу системы с помощью линейных преобразований строк приведем к ступенчато-треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & -7 & 12 \\ 4 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & 13 & -13 \\ 14 & 0 & -26 & 26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & 13 & -13 \\ -7 & 0 & 13 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ -7 & 0 & 13 & -13 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ -7/13 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2/13 & 1 & 0 & 1 \\ -7/13 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Система совместна, так как $r(A) = r(A|b) = 2$. Запишем в виде системы:

$$\begin{cases} -2/13x_1 + x_2 = 1, \\ -7/13x_1 + x_3 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2/13x_1, \\ x_3 = -1 + 7/13x_1. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений однородной СЛАУ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/13 \\ 7/13 \end{pmatrix}$,

частное решение неоднородной СЛАУ $X_{чн} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Общее решение неоднородной СЛАУ $X = C_1 X_1 + X_{чн} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2/13 \\ 7/13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$