Контрольная работа с решением
Исследование функции и построение графика

Задача 1. Заданную функцию исследовать методами дифференциального исчисления. Построить график функции.

$y=\left(x^2-1\right)^3$

Решение.

1) Область определения – вся числовая прямая, $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) Функция четная, так как

$y(-x)=\left((-x)^2-1\right)^3=\left(x^2-1\right)^3=y(x)$.

График функции симметричен относительно оси Oy.

3) Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

4, 5) Найдем наклонные или горизонтальные асимптоты вида $y=kx+b$ ($y=b$).

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)^3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1\right)^2=\infty$,

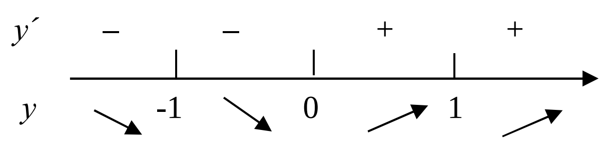
Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

6) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$y'=\left(\left(x^2-1\right)^3\right)'=3\left(x^2-1\right)^2\left(x^2-1\right)'=3\left(x^2-1\right)^2 2x=6x\left(x^2-1\right)^2=0$

Находим критические точки (производная равна нулю): $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(0;1)$, $(1;+\infty)$, убывает на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$.

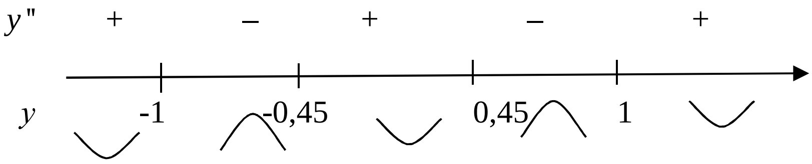
В точке $x=0$ достигается минимум, $y(0)=-1$.

7) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную:

$$y''=\left(6x\left(x^2-1\right)^2\right)'=6\left(x^2-1\right)^2+6x\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x=6\left(x^2-1\right)\left(x^2-1+4x^2\right)=$$
$$=6\left(x^2-1\right)\left(5x^2-1\right)=0.$$

Находим критические точки (производная равна нулю): $x=\pm 1,\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\approx\pm 0,45.$

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-1;-0,45)$, $\left(0,45;1\right)$, выпукла вниз на интервалах $(-\infty;-1)$, $\left(-0,45;0,45\right)(1;+\infty)$.

Точки перегиба:
$x=\pm 1,\ \ y\left(\pm 1\right)=0.$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\approx\pm 0,45,\ y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx -0,51.$

8) Точки пересечения с осями координат:
Ox:
$y(x)=\left(x^2-1\right)^3=0,$

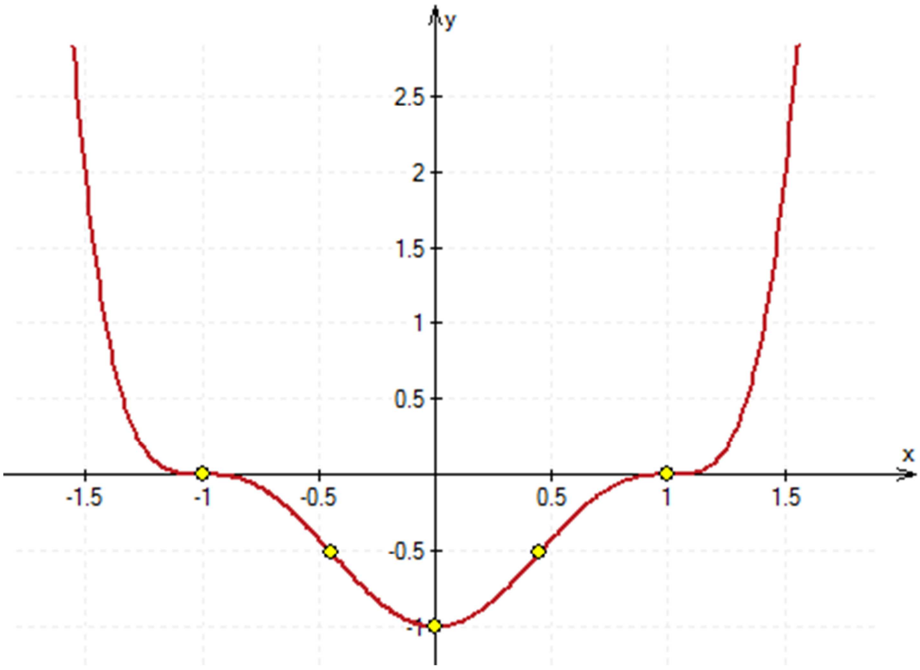
$x^2-1=0,$

$x^2=1,$

$x=\pm 1.$
Точки (-1, 0) и (1, 0).

Oy: $x=0,\Rightarrow y=-1$, точка (0, -1).

Строим график и отмечаем ключевые точки:



Задача 2. Исследовать функцию и построить график

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Решение.

1) Область определения – вся числовая прямая $D(y) = (-\infty; +\infty)$, точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет.

2) Точки пересечения с осями координат.

Ось Ox: $y = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, $x = 2$, точка (2; 0)

Ось Oy: $x = 0$, $y = -2$, точка (0; -2).

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x) = \frac{-x-2}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} \neq \pm y(x).$$

4) Экстремумы и монотонность.

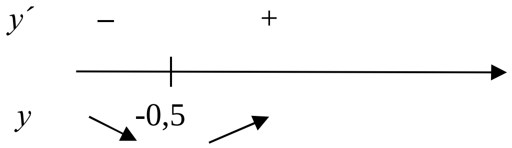
Вычисляем первую производную и приравниваем к нулю:

$$y'=\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{1\sqrt{x^2+1}-(x-2)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-2)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=,$$

$$=\frac{x^2+1-x(x-2)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\frac{x^2+1-x^2+2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\frac{1+2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=0.$$

Критическая точка: $x=-1/2=-0,5$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит области определения функции.



Функция убывает на интервале $(-\infty;-0,5)$, возрастает на интервале $(-0,5;+\infty)$. Функция имеет минимум при $x=-0,5$, $y(-0,5)\approx-2,24$.

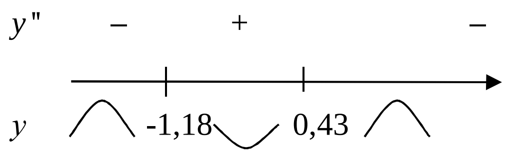
5) Выпуклость, точки перегиба.

$$y''=\left(\frac{1+2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}\right)'=\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3-(1+2x)3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^6}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+1\right)-(1+2x)3x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}=\frac{2x^2+2-3x-6x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}=\frac{2-3x-4x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}=0$$

Критические точки: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}\approx-1,18$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\approx0,43$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;-1,18)$, $(0,43;+\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-1,18;0,43)$. Точки перегиба:

$x_1=-1,18$, $y(-1,18)\approx-2,06$

$x_2 = 0,43$, $y(0,43) \approx -1,44$

6) Найдем наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x}{\sqrt{x^2+1}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x}{\sqrt{1+1/x^2}} = 1$$

Получили горизонтальную асимптоту $y = 1$.

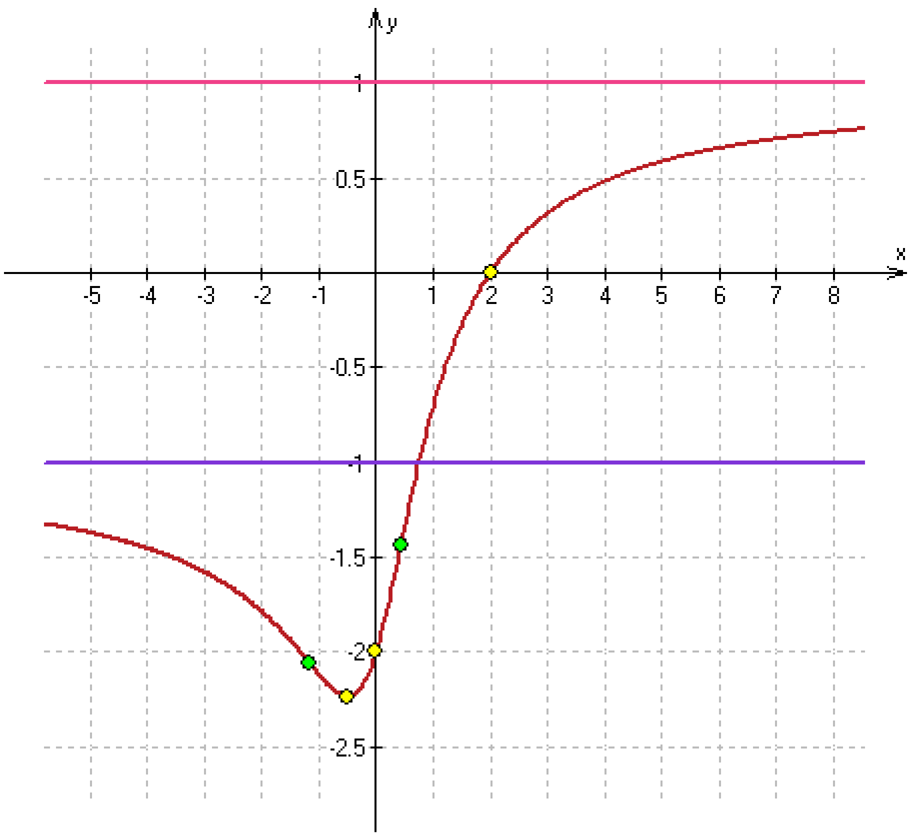
$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{-x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x\sqrt{x^2+1}} = ,$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2/x}{\sqrt{x^2+1}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y-kx) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1-2/x}{\sqrt{1+1/x^2}} = -1$$

Получили горизонтальную асимптоту $y = -1$.

7) Строим график, отмечаем ключевые точки и асимптоты.



Задача 3. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию. Найти асимптоты и построить график.

$$y=\frac{(x-1)^4}{x^4}$$

Решение.

Функцию можно также записать так:

$$y=\frac{(x-1)^4}{x^4}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^4=\left(1-\frac{1}{x}\right)^4.$$

1) Область определения $x\neq 0$, то есть $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Точка разрыва $x=0$.

Исследуем пределы слева и справа:

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4=(1\pm\infty)^4=\infty.$$

Таким образом, $x=0$ - двусторонняя вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^4=0$, $x=1$, точка (1,0).

Oy: $x=0\notin D(y)$, нет точек.

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\left(1-\frac{1}{-x}\right)^4=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4\neq\pm y(x).$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^4\right)'=4\left(\frac{x-1}{x}\right)^3\left(\frac{x-1}{x}\right)'=4\left(\frac{x-1}{x}\right)^3\frac{x-x+1}{x^2}=4\frac{(x-1)^3}{x^5}=0$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует): $x=1$, $x=0$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.

y'	+		–		+
y	↗	0	↘	1	↗

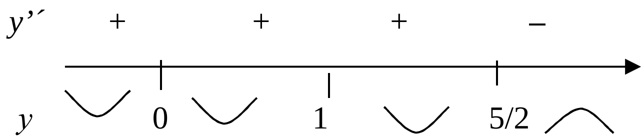
Функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),\ (1;+\infty)$, убывает на интервале $(0;1)$. Функция имеет минимум при $x=1$, $y(1)=0$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную:

$$y''\left(4\frac{(x-1)^3}{x^5}\right)' = 4\frac{3(x-1)^2x^5-(x-1)^3 5x^4}{x^{10}} = 4(x-1)^2\frac{3x-(x-1)5}{x^6} =$$

$$=4(x-1)^2\frac{3x-5x+5}{x^6} = 4(x-1)^2\frac{-2x+5}{x^6} = 0.$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует):
$x=0,\quad x=5/2,\ x=1$.
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервале $(5/2;+\infty)$, выпукла вниз на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;1),\ (1;5/2)$. Точка перегиба: $x=5/2$, $y(5/2)=\frac{81}{625}=0{,}1296$.

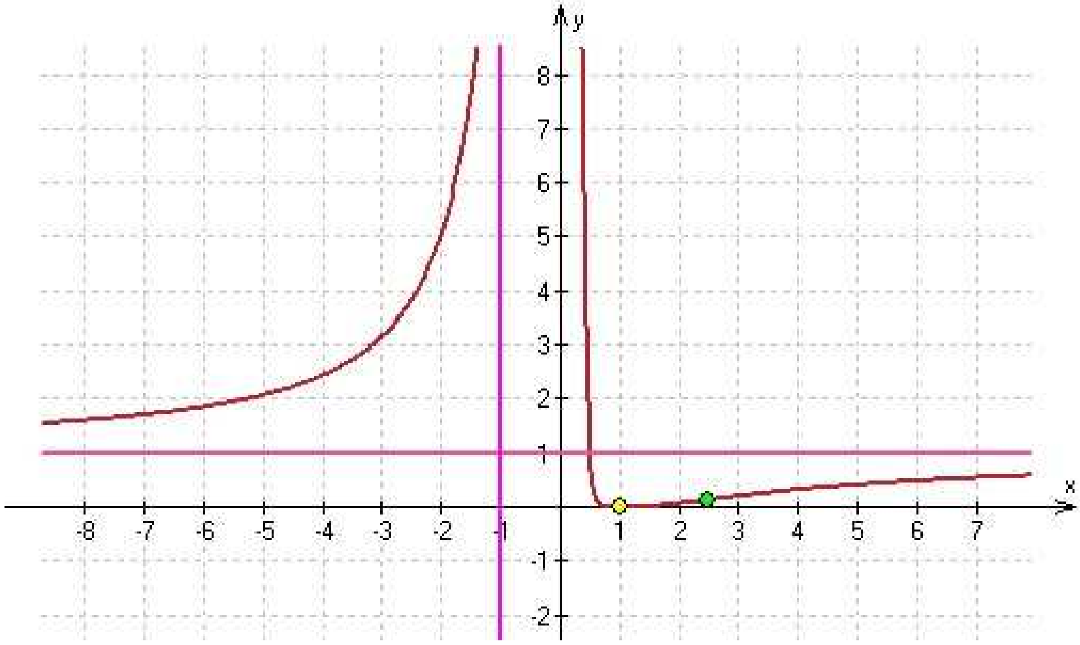
6) Найдем наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4=1$$

Получаем горизонтальную асимптоту $y=1$.

7) Строим график и отмечаем ключевые точки и асимптоту:


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7