Практические задания к теме «Аналитическая геометрия»
Вариант 10

Задача 1. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2 порядка, найти все ее параметры, построить кривую.

$4x^2+y^2-16x-6y+21=0$

Решение. Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$4x^2+y^2-16x-6y+21=0,$$
$$4(x^2-4x)+(y^2-6y)+21=0,$$
$$4(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=-21+16+9,$$
$$4(x-2)^2+(y-3)^2=4,$$
$$\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{(y-3)^2}{4}=1,$$
$$\frac{(x-2)^2}{1^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса $\frac{(y-3)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{1^2}=1$ с центром в точке $O(2;3)$ и полуосями $a=2$, $b=1$.

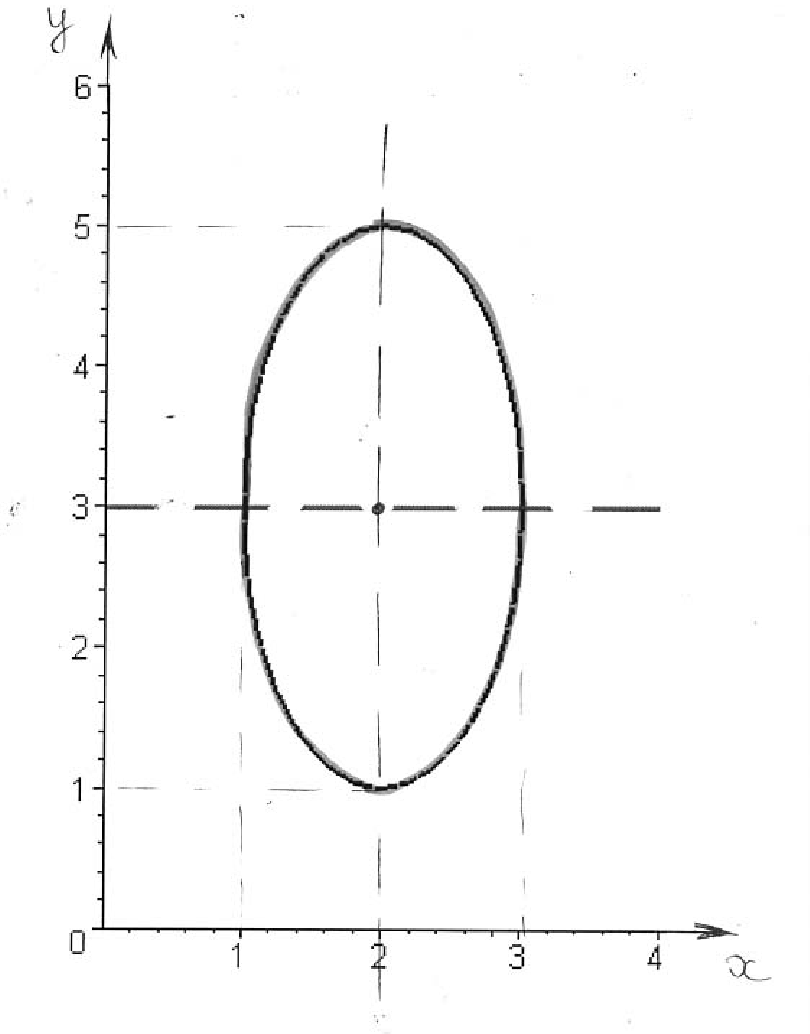
Параметр c: $c^2=a^2-b^2=4-1=3$, $c=\sqrt{3}$.
Тогда фокусы гиперболы расположены в точках:
$F_1(2,c+3)=F_1\left(2,\sqrt{3}+3\right)$ и $F_2(2,-c+3)=F_2\left(2,-\sqrt{3}+3\right)$.

Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,866<1$.

Директрисы гиперболы:

$$y-3=\pm\frac{a}{\varepsilon},$$
$$y=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}+3.$$

Сделаем чертеж. Начертим эллипс, отметим центр $O(2;3)$



Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: уравнение грани ABC, площадь грани ABC, уравнение прямой AD, угол между прямой AD и гранью ABC, длину ребра AB, объем пирамиды $ABCD$, уравнение высоты, проведенной из вершины D на грань ABC, расстояние от точки D до плоскости грани ABC.

A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1), D(-4;2;5)

Решение.
Найдем координаты и длины векторов:

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\} = \{1-2, 2+1, -1-2\} = \{-1, 3, -3\}.$$

$$\overline{AC} = \{x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A\} = \{3-2, 2+1, 1-2\} = \{1, 3, -1\}.$$

$$\overline{AD} = \{x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A\} = \{-4-2, 2+1, 5-2\} = \{-6, 3, 3\}.$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}.$$

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$.

$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

1) Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 6\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k} = \{6; -4; -6\}$

В качестве нормали к грани (плоскости) ABC можно выбрать вектор $\bar{n} = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC} = \{3; -2; -3\}$. Так как плоскость проходит через точку $A(2,-1,2)$, получаем уравнение:

$3(x - x_A) - 2(y - y_A) - 3(z - z_A) = 0$,

$3(x-2) - 2(y+1) - 3(z-2) = 0$,

$3x - 6 - 2y - 2 - 3z + 6 = 0$,

$3x - 2y - 3z - 2 = 0$.

2) Найдем площадь грани ABC по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{22} \approx 4,69.$$

3) Найдем уравнение прямой AD. В качестве направляющего вектора прямой можно выбрать $\overline{AD} = \{-6, 3, 3\}$. Тогда канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_D}{-6} = \frac{y - y_D}{3} = \frac{z - z_D}{3}$$

или

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{1}.$$

4) Найдем угол β между прямой AD и гранью ABC по формуле:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AD}\cdot\bar{n}}{\left|\overline{AD}\right|\cdot|\bar{n}|} = \frac{-6\cdot 3 + 3\cdot(-2) + 3\cdot(-3)}{3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{22}} = \frac{-18-6-9}{6\sqrt{132}} = -\frac{33}{6\sqrt{132}} = -\frac{11}{2\sqrt{132}}$$

откуда $\beta = \arcsin\left(-\frac{11}{2\sqrt{132}}\right) \approx -0,499\ рад \approx -28,6^0$.

5) Найдем длину ребра AB: $AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{19} \approx 4,359$

6) Найдем объем пирамиды $ABCD$. Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1&3&-3\\1&3&-1\\-6&3&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1&3&-3\\1&3&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}=3\left(-1\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&-1\\-2&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&3\\-2&1\end{vmatrix}\right)=$$
$$=3(-4+3-21)=-66.$$

Тогда объем пирамиды
$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{66}{6}=11.$$

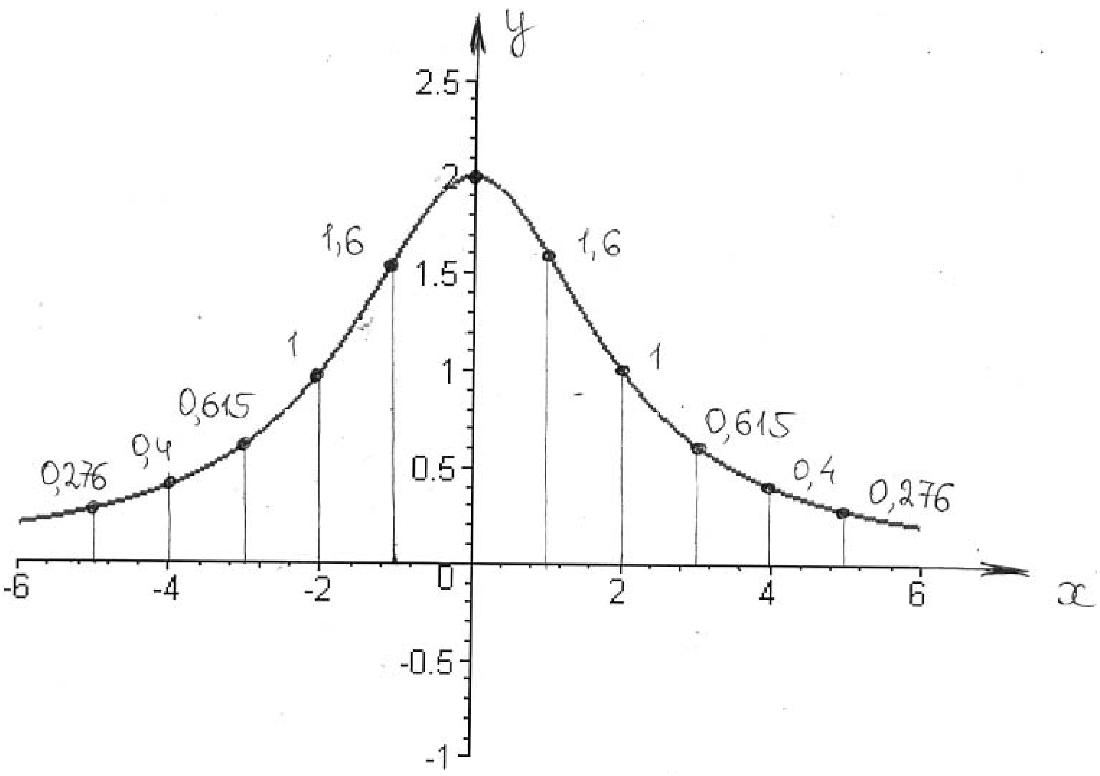
7) Найдем уравнение высоты, проведенной из вершины D на грань ABC. Так как высота $DH\perp ABC$, в качестве направляющего вектора DH можно выбрать нормаль к плоскости ABC: $\bar{n}=\{3;-2;-3\}$. Так как высота проходит через точку $D(-4,2,5)$, уравнение искомой прямой имеет вид:
$$\frac{x-x_D}{3}=\frac{y-y_D}{-2}=\frac{z-z_D}{-3},$$
$$\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{-3}.$$

8) Найдем расстояние от точки D до плоскости грани ABC по формуле:
$$d=\frac{|3x_D-2y_D-3z_D-2|}{|\bar{n}|}=\frac{|-12-4-15-2|}{2\sqrt{22}}=\frac{|33|}{2\sqrt{22}}=\frac{3}{4}\sqrt{22}\approx 3,518.$$

Задача 3. Построить в декартовой системе координат следующие кривые:
Локон Аньези $y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

Решение. Построим кривую по точкам. Составим расчетную таблицу:

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	2	1,6	1	0,615	0,4	0,276



Задача 4. Дана кривая. Привести к каноническому виду. Построить и определить вид кривой.

$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$

Решение. Составим матрицу для квадратичной формы $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2$:

$A=\begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы:

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 6-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)(2-\lambda)-5=12-6\lambda-2\lambda+\lambda^2-5=$

$=\lambda^2-8\lambda+7=(\lambda-1)(\lambda-7)=0,$

Получаем два собственных значения $\lambda_1=1,\ \lambda_2=7$.

Найдем соответствующие собственные векторы.

$\lambda_1=1$. Получаем систему

$\begin{cases} 5x+\sqrt{5}y=0, \\ \sqrt{5}x+y=0, \end{cases} \Rightarrow y=-\sqrt{5}x$.

Собственный вектор $r_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$, нормируем его $r_1^0=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=7$. Получаем систему

$$\begin{cases} -x+\sqrt{5}y=0, \\ \sqrt{5}x+5y=0, \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{5}y.$$

Собственный вектор $r_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем его $r_2{}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матрица S перехода к новому базису имеет столбцами нормированные собственные вектора:

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(x_1+\sqrt{5}y_1\right), \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{5}x_1+y_1\right). \end{cases}$$

В базисе собственных векторов квадратичная форма примет вид:

$$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$$

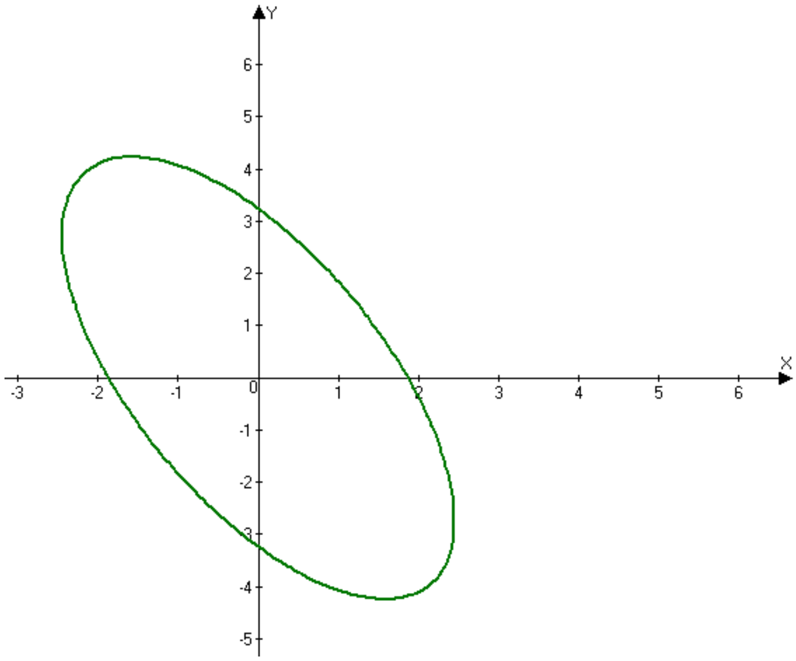
$$\rightarrow \qquad .$$

$$x_1^2+7y_1^2=21$$

$$\frac{x_1^2}{21}+\frac{y_1^2}{3}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса.

Сделаем чертеж линии $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$:



Задача 5. Общее уравнение кривой второго порядка Г привести к каноническому. Найти координаты центра, координаты вершин и фокусов. Написать уравнения асимптот и директрис. Построить линии на графики, отметить точки.

$x^2-y^2+8x+6y+3=0$.

Решение. Приводим уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$x^2-y^2+8x+6y+3=0,$$
$$\left(x^2+8x\right)-\left(y^2-6y\right)+3=0,$$
$$\left(x^2+2\cdot 4\cdot x+16\right)-\left(y^2-2\cdot 3\cdot y+9\right)=-3+16-9,$$
$$\left(x+4\right)^2-\left(y-3\right)^2=4,$$
$$\left(x+4\right)^2-\left(y-3\right)^2=2^2.$$

Получили $\left(x+4\right)^2-\left(y-3\right)^2=2^2$ или $\dfrac{\left(x+4\right)^2}{2^2}-\dfrac{\left(y-3\right)^2}{2^2}=1$.

Это уравнение гиперболы с центром в точке $\left(-4;3\right)$ и полуосями $a=2$, $b=2$.

Вершины в точках $\left(-4-2;3\right)=A_1\left(-6;3\right)$, $\left(-4+2;3\right)=A_2\left(-2;3\right)$.

Оси симметрии для кривой: $x=-4,\ y=3$ (см. чертеж серым).

Асимптоты гиперболы:

$$y = \pm\frac{b}{a}(x+4)+3 = \pm(x+4)+3,$$

$$y_1 = x+7,\ \ y_2 = -x-1.$$

(см. чертеж коричневым).

Параметр $c^2 = a^2 + b^2 = 4+4 = 8, c = 2\sqrt{2}$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = c/a = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1$.

Фокусы в точках

$$F_1\left(-4-2\sqrt{2};3\right) = F_1\left(-6,83;3\right)$$

$$F_2\left(-4+2\sqrt{2};3\right) = F_2\left(-1,17;3\right)$$

Сделаем чертеж: