Практическая работа по теории вероятностей II

Вариант 12

Задание 1.

12. Производится два независимых выстрела по мишени с вероятностью попадания при каждом выстреле равной p. Для случайной величины ξ, представляющей собой разность между числом попаданий и числом промахов, построить ряд распределения, функцию распределения и начертить её график; найти мат.ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Решение. Составим закон распределения случайной величины ξ = (разность между числом попаданий и числом промахов при двух выстрелах).

ξ принимает значение 0, если первый выстрел не попал в мишень, а второй попал, или наоборот, первый попал, а второй нет (число промахов и попаданий равно 1, разность между ними 0), поэтому $P(\xi=0)=(1-p)\cdot p+p\cdot(1-p)=2p-2p^2=2p(1-p)$..

ξ принимает значение 2, если или оба выстрела попали в мишень, будет 2 попадания и 0 промахов, 2-0=2, поэтому $P(\xi=2)=p^2$.

ξ принимает значение -2, если оба выстрела не попали в мишень, будет 0 попаданий и 2 промаха, 0-2=-2, поэтому $P(\xi=-2)=(1-p)^2$.

Получили ряд распределения

ξ	-2	0	2
p	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

Найдем числовые характеристики случайной величины X .

$$M\xi=\sum x_i p_i=-2(1-p)^2+0\cdot 2p(1-p)+2p^2=-2+4p-2p^2+2p^2=4p-2.$$

$$D\xi=\sum x_i^2 p_i-(M\xi)^2=(-2)^2(1-p)^2+0^2\cdot 2p(1-p)+2^2p^2-(4-2p)^2=$$
$$=4-8p+4p^2+4p^2-\left(4-16p+16p^2\right)=4-8p+8p^2-4+16p-16p^2=8p-8p^2.$$

Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -2,\\ (1-p)^2,\ -2<x\le 0,\\ (1-p)^2+2p(1-p),\ 0<x\le 2,\\ (1-p)^2+2p(1-p)+p^2,\ x>2.\end{cases}$$

Или

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -2,\\ (1-p)^2,\ -2<x\le 0,\\ 1-p^2,\ 0<x\le 2,\\ 1,\ x>2.\end{cases}$$

График построить нельзя, так как значение вероятности p не задано.

<u>Задание 2</u>. (*номер варианта и исходные данные к нему – по таблице* 1)

Дискретная случайная величина ξ может принимать только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1<x_2$. Заданы: вероятность p одного из возможных значений, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$. Найти:

1) закон распределения этой случайной величины;

2) функцию распределения $F(x)$ случайной величины;

3) построить график $F(x)$.

Таблица 1

№ варианта	P_k	$M\xi$	$D\xi$
12	0,3	6,6	13,44

Решение. Пусть

$P = p(x_1) = 0,3$,

тогда

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 0,7$.

Математическое ожидание:

$$M(x) = \sum x_i \cdot p_i = 0,3x_1 + 0,7x_2 = 6,6.$$

Дисперсия:

$$D(x) = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M(x))^2 = 0,3x_1^2 + 0,7x_2^2 - 6,6^2 = 13,44.$$

Получаем систему уравнений относительно величин x_1 и x_2:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 66, \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 570. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения :

$$x_1 = 1, x_2 = 9 \text{ и } x_1 = \frac{61}{5}, x_2 = \frac{21}{5}.$$

Условию $x_1 < x_2$ удовлетворяет первое решение, поэтому получаем закон распределения

x_i	1	9
p_i	0,3	0,7

Найдем функцию распределения $F(x)=P(X<x)$. Таким образом,

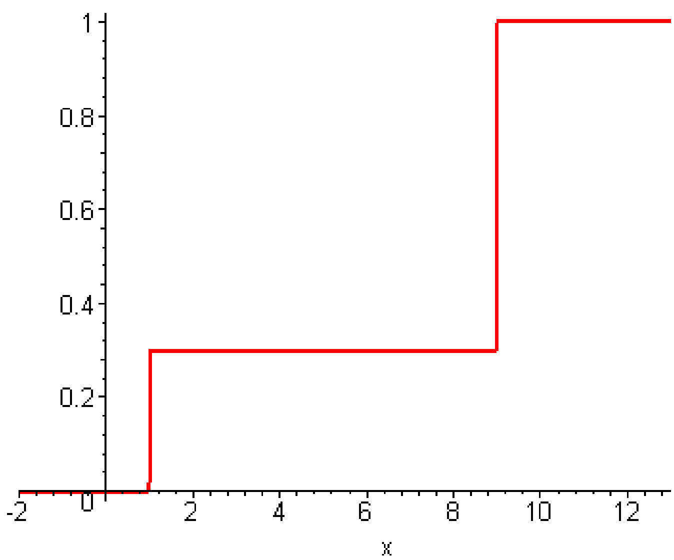
при $x \le 1$ $F(x)=0$,

при $1<x \le 9$ $F(x)=0+0,3=0,3$,

при $x>9$ $F(x)=0,3+0,7=1$.

То есть $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,3, & 1<x \le 9, \\ 1, & x>9. \end{cases}$

График этой функции:



Задание 3. (*номер варианта и исходные данные к нему – по таблице* 2)

Случайная величина задана плотностью, которая имеет вид: $f(x)=\mu \cdot e^{ax^2+bx+c}$. Найти:

1) значение коэффициента μ;

2) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение и коффициент вариации;

3) функцию распределения $F(x)$;

4) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

5) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β).

Таблица 2

№	a	b	c	α	β
12	-2	-8	0	-1,5	-1

Решение. Получаем плотность распределения:

$$f(x)=\mu\cdot e^{-2x^2-8x+0}=\mu\cdot e^{-2\left(x^2+4x\right)}=\mu\cdot e^{-\frac{\left(x^2+4x+4\right)-4}{1/2}}=\mu\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{1/2}-8}=\mu e^{-8}\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{1/2}}.$$

Сопоставляем его с каноническим видом для нормально распределенной случайной величины:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$ получаем:

$$(x-a)^2=(x+2)^2, \Rightarrow a=-2,$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}=-\frac{1}{1/2}, \Rightarrow 2\sigma^2=1/2,\ \sigma^2=1/4,\ \sigma=1/2.,$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\mu e^{-8}, \Rightarrow \mu=e^{8}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=e^{8}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

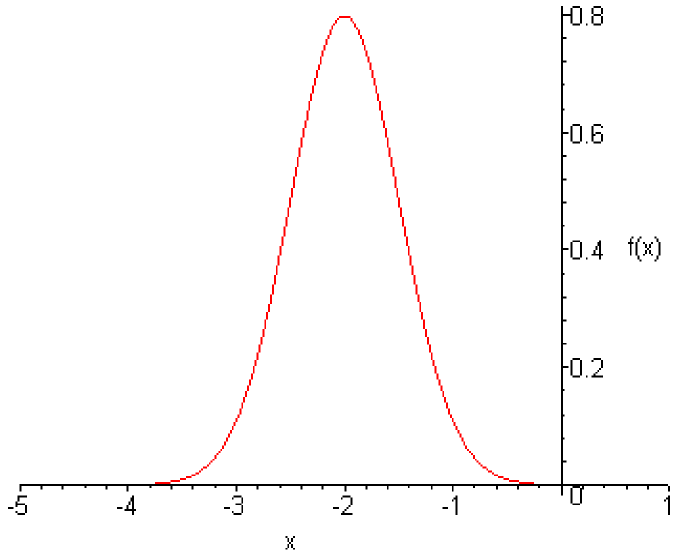
Получаем $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-2(x+2)^2}$.

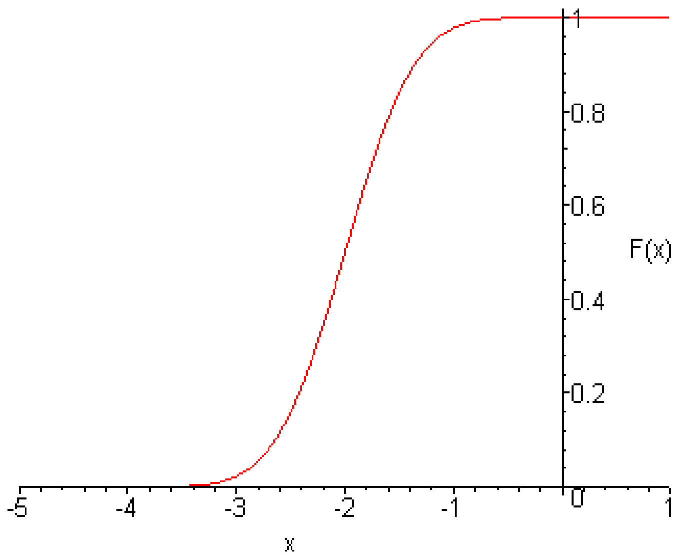
Математическое ожидание $a=-2$, среднеквадратическое отклонение равно $\sigma=1/2$, дисперсия $D=\sigma^2=1/4$, коэффициент вариации: $V=\frac{\sigma}{a}=\frac{1/2}{2}=\frac{1}{4}=0,25$ или 25%.

Функция распределения случайной величины X , данной в задаче, равна:

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-2(t+2)^2}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+2}{1/2}\right)$, где $\Phi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ - функция Лапласа.

Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.





Найдем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(-1,5;-1)$.

Используем формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

Получаем:

$$P(-1,5 < X < -1) = \Phi\left(\frac{-1+2}{1/2}\right) - \Phi\left(\frac{-1,5+2}{1/2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359.$$

<u>Задание 4</u>. (*номер варианта и исходные данные к нему – по таблице* 3)

Вариант 12

Случайная величина ξ задана функцией распределения $F(x)$ или плотностью распределения $f(x)$. Найти:

а) найти коэффициенты A и B;

б) плотность вероятности $f(x)$ или функцию $F(x)$;

в) математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$;

г) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

д) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β).

Таблица 3

№	$F(x)$ или $f(x)$	α	β
12	$F(x) = A + B(e^x+1)^{-1}, -\infty < x < \infty$	0	∞

Решение. $F(x) = A + B(e^x+1)^{-1} = A + \frac{B}{e^x+1}$.

Найдем постоянные A и B.

$$\begin{cases} F(-\infty) = A + \frac{B}{1} = 0, \\ F(\infty) = A + \frac{B}{\infty} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1, \\ A = 1. \end{cases}$$

Получили $F(x)=1-\frac{1}{1+e^x}$.

Найдем плотность вероятности: $f(x)=F'(x)=\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)'=-(-1)\frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}\left(e^x\right)'=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

Найдем математическое ожидание:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=-\ln\left(e^x+1\right)+\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=$$

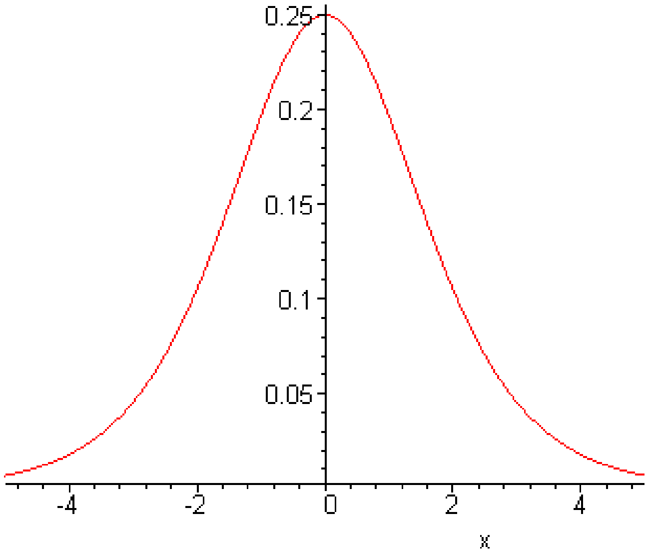
$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)+\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)}\right)-\lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)+\frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)}\right)=0.$$

Найдем дисперсию. Вычислим

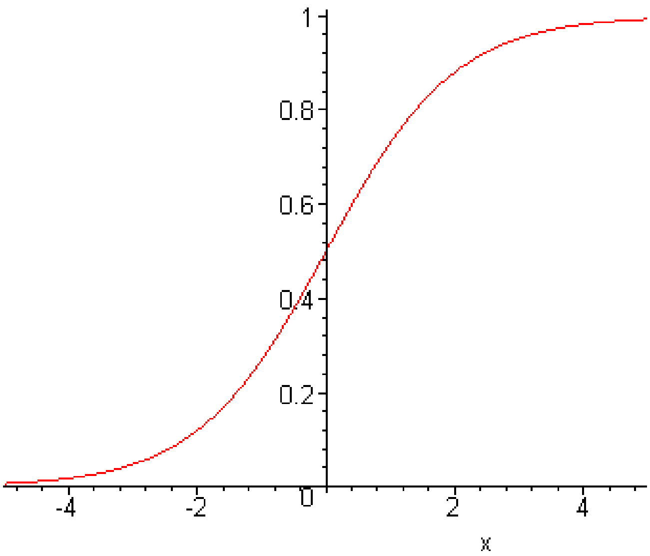
$$D\xi=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2dx-0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}x^2dx=\frac{1}{3}\pi^2.$$

Построим графики: $f(x)$ и $F(x)$.

$f(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$:



$F(x)=1-\dfrac{1}{1+e^x}$:



Вычислим вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)=(0;\infty)$.

$$P(0<x<\infty)=F(\infty)-F(0)=1-\frac{1}{(\infty+1)}-\left(1-\frac{1}{(1+1)}\right)=\frac{1}{2}.$$