Контрольная по алгебре с решением

Задача 1. Найти и изобразить на числовой плоскости XOY множество всех значений (x, y), при которых данные матрицы A и B перестановочны, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим произведения матриц A и B в различном порядке:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(x+y)+xy & -5+y^2 \\ 1(x+y)+4x & -1+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y+xy & -5+y^2 \\ 5x+y & -1+4y \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} x+y & -1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & y \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(x+y)-1 & y(x+y)-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y-1 & xy+y^2-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix}.$$

По условию, нужно обеспечить равенство $A \cdot B = B \cdot A$ (перестановочность). Получаем:

$$\begin{pmatrix} 5x+5y+xy & -5+y^2 \\ 5x+4 & -1+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y-1 & xy+y^2-4 \\ 5x+y & xy+4y \end{pmatrix}$$

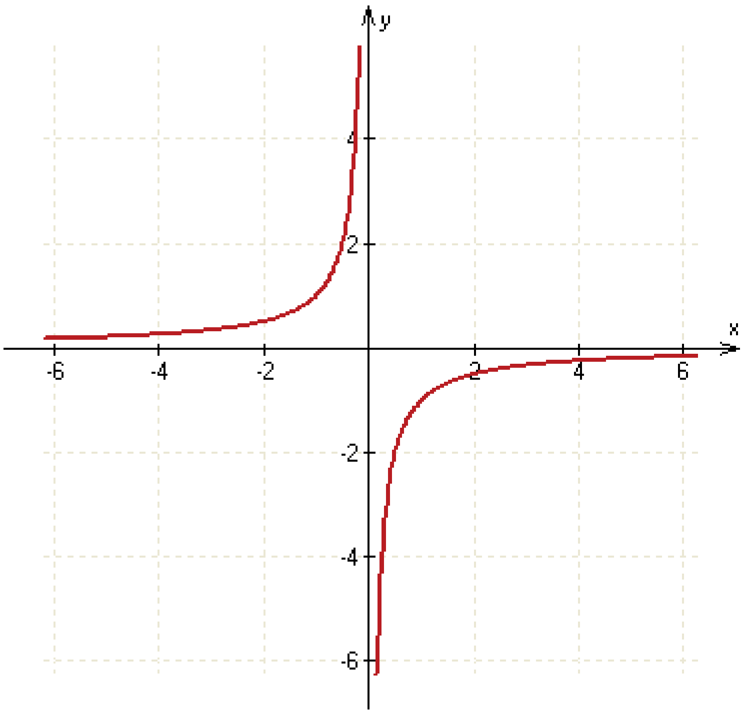
Приравниваем элементы матриц и приходим к системе:

$$\begin{cases} 5x+5y+xy = 5x+5y-1, \\ -5+y^2 = xy+y^2-4, \\ 5x+y = 5x+y, \\ -1+4y = xy+4y. \end{cases}$$

Упрощаем ее:

$$\begin{cases} xy = -1, \\ xy = -1, \\ 0 = 0, \\ xy = -1. \end{cases}$$

Пришли, что переменные связаны соотношением: $xy = -1$ или $y = -\dfrac{1}{x}$. Это гипербола, лежащая во 2 и 4 четвертях. Сделаем чертеж:



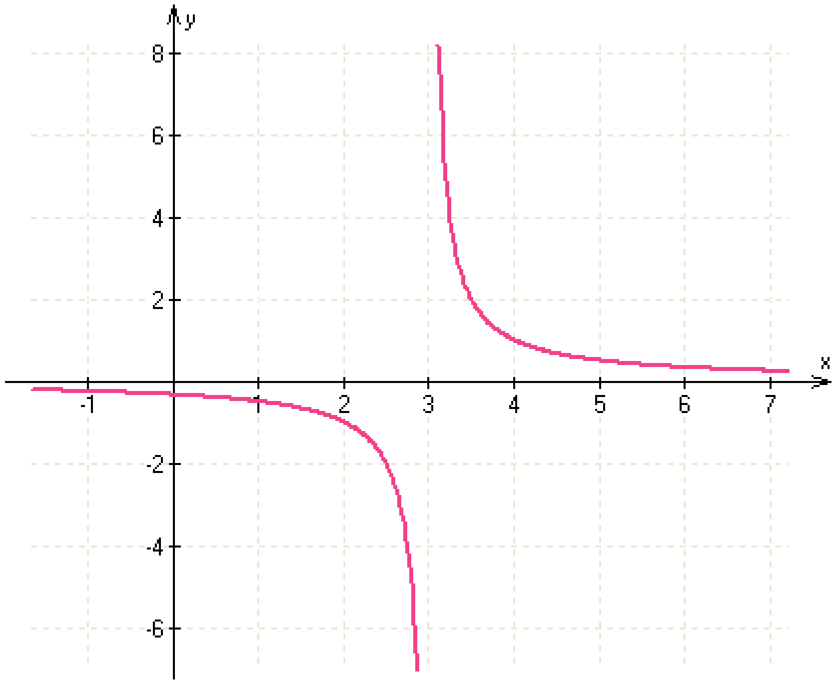
Задача 2. Построить график данной функции:

$$y=\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}}.$$

Решение. Вычислим определитель, раскладывая по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(x-3)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-3)(6-5) = x-3.$$

Получили функцию $y=\frac{1}{x-3}$. Это гипербола. Строим график:



Задача 3. Даны две матрицы A и B. Найти неизвестную матрицу X, удовлетворяющую данному матричному уравнению: $X = A\cdot B\left(2E-B\right)^{-1}$, где

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 2 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисляем последовательно.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 14+0\\ -3+2 & -21+7\\ -1-2 & -7-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 14\\ -1 & -14\\ -3 & -14\end{pmatrix}$$

$$C=\left(2E-B\right)=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 2 & 7\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2+1 & 0+7\\ 0-2 & 2-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -2 & -5\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу. Сначала вычислим определитель матрицы:

$$|C|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-15+14=-1\neq 0.$$

Обратная матрица существует. Найдем ее по формуле $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\widetilde{C}^{T}$. Матрица алгебраических дополнений: $\widetilde{C}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -7 & 3\end{pmatrix}$

Обратная матрица:

$$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -7 & 3\end{pmatrix}^T=-\begin{pmatrix}-5 & -7\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим:

$$X=A\cdot B\left(2E-B\right)^{-1}=A\cdot B\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 14\\ -1 & -14\\ -3 & -14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10-28 & 14-42\\ -5+28 & -7+42\\ -15+28 & -21+42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & -28\\ 23 & 35\\ 13 & 21\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-18 & -28\\ 23 & 35\\ 13 & 21\end{pmatrix}$

Задача 4. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=0,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=8,\\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1.\end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить методом Гаусса.

Решение. Проверим совместность системы. Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12+8) - 5(-9-4) + (-12-8) = -4 + 65 - 20 = 41 \neq 0.$$

Определитель не равен нулю, значит, система совместна (ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3).

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое, умноженное на 3.

Вычитаем из третьего уравнения первое, умноженное на 2.

Получаем:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ -11x_2 - x_3 = 8, \\ -14x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Умножим третье уравнение на (-1).

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ -11x_2 - x_3 = 8, \\ 14x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе, умноженное на 5.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ -11x_2 - x_3 = 8, \\ -41x_2 = 41. \end{cases}$$

Выражаем из последнего уравнения $x_2 = -1$, подставляем в систему и находим последовательно остальные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 - 5 + x_3 = 0, \\ 11 - x_3 = 8, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5 + 3 = 0, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_2 = -1. \end{cases}$