Функции многих переменных

Полный дифференциал

Полный дифференциал du функции $u = f(x, y, \dots, t)$ (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \dots + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Функция называется *дифференцируемой* в точке, если она имеет в этой точке полный дифференциал. При достаточно малых приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом: $\Delta u \approx du$.

Производная сложной функции

Пусть $z = F(u, v, \dots, w)$, где $u = f(x, y, \dots, t)$, $v = \varphi(x, y, \dots, t)$, ..., $w = \psi(x, y, \dots, t)$. Тогда частные производные от функции z вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Если u, v, ..., w — функции только от x, то z — сложная функция от x и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \dots + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Производная неявной функции

Пусть функция $z(x, y)$ задана неявным соотношением $F(x, y, z) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

В частности, если функция $y = y(x)$ задана уравнением $f(x, y) = 0$, то $y'_x = -f'_x/f'_y$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x-0, y_0, z_0)$ лежит на ней. Тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0,$$

а уравнение нормали (прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости) имеет вид

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(M_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(M_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(M_0)}.$$

Если F'_x, F'_y, F'_z обращаются в нуль в некоторой точке, то она называется *особой*, в ней не существуют ни касательная плоскость, ни нормаль.

Экстремум функции двух переменных

Значение функции $f(M)$ в точке M называется *максимумом* (*минимумом*), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках. Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в тех точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Такие точки называются *критическими*.

После нахождения критической точки M_0, нужно исследовать в ней знак определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

При этом:

1. Если $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум (минимум, если $f''_{xx} > 0$ или максимум, если $f''_{xx} < 0$).
2. Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.
3. Если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии в точке M_0 экстремума необходимо дополнительное исследование.

Условия 1 и 2 являются *достаточными* условиями наличия (отсутствия) экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D обязательно имеет в этой области *наибольшее и наименьшее значения*. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Правило:

1. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значение функции в этих точках.
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области D.
3. Сравнить полученные значения функции (внутри области и на границе) и выбрать наибольшее и наименьшее.