Задача с решением по уравнению с математической физики
Уравнение Лапласа в прямоугольнике

ЗАДАНИЕ.

Решить уравнение Лапласа в прямоугольнике:

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

$$u(0,y)=0,\ u(2,y)=0,$$

$$u(x,0)=0,\ u(x,2)=\sin(\pi x/2).$$

РЕШЕНИЕ.

(1) $u_{xx}+u_{yy}=0,$

(2) $u(0,y)=0,\ u(2,y)=0,$

(3) $u(x,0)=0,\ u(x,2)=\sin(\pi x/2).$

Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде произведения функций $u(x,y)=X(x)Y(y)$. Подставляем и получаем:

$$X''(x)Y(x)+X(x)Y''(y)=0.$$

Рассматриваем уравнение, разделяем в нем переменные:

$$X''(x)Y(x)+X(x)Y''(y)=0,$$

$$X''(x)Y(x)=-X(x)Y''(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Здесь правая часть зависит только от y, а левая только от x, это возможно, только если каждая часть равенства равна постоянной, обозначим ее $-\lambda$.
Получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda.$$

Приходим к двум уравнениям:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$

$$Y''(y)-\lambda Y(y)=0.$$

Дополняем первое уравнение граничными условиями, полученными из (2), и получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$

$$X(0)=X(2)=0.$$

Собственные значения и функции для этой задачи известны:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2,\ X_n = \sin\frac{\pi n}{2}x.$$

Тогда второе уравнение запишется в виде:

$$Y''(y) - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 Y(y) = 0.$$

Его общее решение имеет вид: $Y_n(y) = \alpha_n \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{2} + \beta_n \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{2}$.

Следовательно, общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) можно записать в виде ряда (в предположении его равномерной сходимости и дважды дифференцируемости):

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{2} + \beta_n \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{2}x.$$

Осталось найти константы $\alpha_n,\ \beta_n$ из граничных условий (3).

Получаем:

$$\begin{cases} w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{\pi n}{2}x = 0, \\ w(x,2) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \operatorname{ch}\frac{\pi n 2}{2} + \beta_n \operatorname{sh}\frac{\pi n 2}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{2}x = \sin\frac{\pi x}{2}. \end{cases}$$

Из первого разложения сразу находим $\alpha_n = 0$ для всех n.

Рассматриваем второе соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \operatorname{sh}(\pi n)\sin\frac{\pi n}{2}x = \sin\frac{\pi x}{2}, \Rightarrow \begin{cases}\beta_1 \operatorname{sh}\pi = 1 \\ \beta_n = 0, n \ne 1.\end{cases} \quad \begin{cases}\beta_1 = 1/\operatorname{sh}\pi. \\ \beta_n = 0, n \ne 1.\end{cases}$$

Таким образом, нашли $u(x,y) = \frac{1}{\operatorname{sh}\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$.