Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Нахождение закона распределения по производящей функции

Задача. Задана производящая функция вероятностей $p(t) = t(pt+q)^n$. Найти ряд и функцию распределения соответствующей случайной величины.

Решение.

По определению, производящая функция вероятностей

$$p(t) = M(p^X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x)\cdot t^x$$

На основе производящей функции однозначно определяется распределение случайной величины:

$$P(X=k) = \frac{1}{k!}\cdot \frac{d^k}{dt^k}p(t)\bigg|_{t=0}, \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$P(X=0) = \frac{1}{0!}\cdot p(0) = 1\cdot 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = (pt+q)^n + npt(pt+q)^{n-1}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{1!}\cdot \frac{d}{dt}p(t)\bigg|_{t=0} = (0+q)^n + 0 = q^n$$

$$\frac{d^2}{dt^2}p(t) = 2np(pt+q)^{n-1} + n(n-1)p^2t(pt+q)^{n-2}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2!}\cdot \frac{d^2}{dt^2}p(t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2!}\cdot(2npq^{n-1}+0) = npq^{n-1}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}p(t) = 3n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2} + n(n-1)(n-2)p^3t(pt+q)^{n-3}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3!}\cdot \frac{d^3}{dt^3}p(t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{3!}(3n(n-1)p^2q^{n-2}) = \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$$

Рассуждая далее аналогично, получим:

$$\frac{d^k}{dt^k}p(t) = kn(n-1)\dots(n-k+2)p^{k-1}(pt+q)^{n-k+1} +$$
$$+n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)p^k t(pt+q)^{n-k}$$

$$P(X=k) = \frac{1}{k!}\cdot \frac{d^3}{dt^3}p(t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{k!}kn(n-1)\dots(n-k+2)p^{k-1}q^{n-k+1} =$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}p^{k-1}q^{n-k+1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}\cdot p^{k-1}q^{n-k+1} =$$
$$= C_n^{k-1}\cdot p^{k-1}q^{n-k+1}, \qquad k=1,2,\dots,n$$

Итак, ряд распределения заданной случайной величины имеет вид

X	1	2	3	…	k	…	n	$n+1$
p	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	…	$C_n^{k-1}\cdot p^{k-1}q^{n-k+1}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Функция распределения полученной случайной величины:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ q^n, & 1 < x \le 2 \\ q^{n-1}(np+q), & 2 < x \le 3 \\ \dots & \\ \sum_{k=1}^{y} C_n^{k-1} \cdot p^{k-1} q^{n-k+1}, & y < x \le y+1 \\ \dots & \\ 1-p^n, & n < x \le n+1 \\ 1, & x > n+1 \end{cases}$$