

Тема: Одноканальная СМО с отказами

ЗАДАНИЕ. *Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по заказу железнодорожных билетов, имеющему один телефон, составляет $2N=16$ вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна $0,3N=2,4$ минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность этой СМО и вероятность отказа (занятости телефона). Сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее 0,75.*

РЕШЕНИЕ. Имеем систему массового обслуживания (СМО) с одним каналом (один телефонный номер) с отказами. Получаем параметры $\lambda=16/60=4/15$ (интенсивность входящего потока, 4/15 заявок в минуту), $\mu=1/t=1/2,4=5/12$ (интенсивность потока обслуживания, 5/12 заявок за минуту). Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме.

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{5/12}{4/15 + 5/12} = \frac{25}{41} \approx 0,61 \quad \text{- вероятность того, что система свободна}$$

(телефонная линия свободна, заявок нет).

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{4/15}{4/15 + 5/12} = \frac{16}{41} \approx 0,39 \quad \text{- вероятность того, что в системе заявка}$$

(телефонная линия занята). Она же – вероятность отказа в обслуживании.

Относительная пропускная способность $Q = p_0 = 0,61$.

Абсолютная пропускная способность $A = Q\lambda = 0,61 \cdot \frac{4}{15} \approx 0,163$ (среднее число заявок, обслуживаемых в минуту).

Среднее время обслуживания заявки $T_s = \frac{1}{\mu} = 2,4$ минуты, среднее время простоя канала (телефонной линии) $T_{st} = \frac{1}{\lambda} = \frac{15}{4} = 3,75$ минуты.

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{sys} = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{4/15 + 5/12} = \frac{60}{41} \approx 1,46$ минуты.

Найдем, сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее 0,75.

Рассмотрим случай с двумя телефонами. Имеем многоканальную (число каналов $k = 2$) систему массового обслуживания (СМО) с отказами.

Интенсивность входящего потока $\lambda = \frac{4}{15}$, интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{5}{12}$. Введем величину $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,64$ - приведенную

интенсивность входящего потока. Тогда

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \left(\frac{0,64^0}{0!} + \frac{0,64^1}{1!} + \frac{0,64^2}{2!} \right)^{-1} \approx 0,542.$$

$$p_i = p_0 \frac{\rho^i}{i!}, \text{ поэтому } p_2 = 0,542 \frac{0,64^2}{2!} \approx 0,111.$$

Относительная пропускная способность $Q = 1 - p_2 = 1 - 0,111 = 0,889$.

Так как $0,889 > 0,75$, двух телефонов достаточно, чтобы обеспечить нужную пропускную способность системы.