Дифференциальные уравнения в частных производных
Гармоническая функция

ЗАДАНИЕ.

Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат и такую, что $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sin\phi + \cos 4\phi$.

РЕШЕНИЕ.

Здесь задана задача Неймана, где правая часть граничного условия $f(\varphi) = \sin\varphi + \cos 4\varphi$ (уже разложена в ряд Фурье). Решение ищется в круге $(r < R)$, значит выписывать решение будем в виде

$$u(r,\phi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{nR^{n-1}}\left(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi\right).$$

Найдем в этой формуле коэффициенты A_n, B_n. Для этого подставим это решение в левую часть граничного условия при $r = R$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi\right) = \sin\varphi + \cos 4\varphi.$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами

$$1) A_4 = 1$$
$$2)\ B_1 = 1$$

Остальные коэффициенты равны 0. Подставим ненулевые A_4, B_1 в решение и получим ответ, т.е. найдем функцию $u(r,\phi)$

$$u(r,\varphi) = C + r\sin\varphi + \frac{r^4}{4R^3}\cos^4\varphi.$$