Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения в частных производных

ЗАДАНИЕ.

Привести уравнение к каноническому виду.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

РЕШЕНИЕ.

Запишем общий вид уравнения второго порядка

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

и сравним коэффициенты при производных в этом уравнении и в исходном:

$$a = y; \quad b = 0; \quad c = -x.$$

Найдем дискриминант этого уравнения:

$$D = b^2 - ac = 0 - y \cdot (-x) = xy.$$

Осуществим переход к канонической форме с помощью общих интегралов характеристического уравнения. В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$y(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$\sqrt{y}dy = \pm\sqrt{-x}dx,$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \mp\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$C = \frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}} \pm (-x)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Произведем замену $\xi = \frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}}\right)$ è $\eta = \frac{2}{3}\left(y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}}\right)$. Вычислим u_{xx}, u_{xy} è u_{yy}:

$$\xi_x = -\sqrt{-x}, \xi_y = \sqrt{y},$$

$$\xi_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \xi_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \xi_{xy} = 0,$$

$$\eta_x = \sqrt{-x}, \eta_y = \sqrt{y},$$

$$\eta_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \eta_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \eta_{xy} = 0,$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \sqrt{-x}\left(-u_\xi + u_\eta\right),$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \sqrt{y}\left(u_\xi + u_\eta\right),$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + u_\xi \frac{1}{2\sqrt{-x}} - u_\eta \frac{1}{2\sqrt{-x}},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} =$$

$$= yu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + yu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(u_\xi + u_\eta\right),$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_y\eta_x + \xi_x\eta_y\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} =$$

$$= -\sqrt{-xy}u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\sqrt{xy}.$$

Подставим полученные производные в исходное уравнение и после преобразований, получим

$$yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0,$$

$$y\left(-xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + u_\xi \frac{1}{2\sqrt{-x}} - u_\eta \frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) -$$

$$-x\left(yu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + yu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(u_\xi + u_\eta\right)\right) + \sqrt{-x}\left(-u_\xi + u_\eta\right) + y\sqrt{y}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0,$$

$$u_{\xi\xi}\left(-xy - xy\right) + u_{\xi\eta}\left(2xy - 2xy\right) + u_{\eta\eta}\left(-xy - xy\right) +$$

$$+u_\xi\left(\frac{y}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{-x} + y\sqrt{y}\right) + u_\eta\left(-\frac{y}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{-x} + y\sqrt{y}\right) = 0,$$

$$-2xy\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) + u_\xi\left(\frac{y}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{-x} + y\sqrt{y}\right) +$$

$$+u_\eta\left(-\frac{y}{2\sqrt{-x}} - \frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{-x} + y\sqrt{y}\right) = 0,$$

$$\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) + u_\xi\left(-\frac{1}{4x\sqrt{-x}} + \frac{1}{4y\sqrt{y}} - \frac{1}{2y\sqrt{-x}} - \frac{\sqrt{y}}{2x}\right) +$$

$$+u_\eta\left(\frac{1}{4x\sqrt{-x}} + \frac{1}{4y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{-x}y} - \frac{\sqrt{y}}{2x}\right) = 0.$$

,

Выразим x, y через ξ, η:

$$\xi + \eta = \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{4}(\xi + \eta)\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\xi - \eta = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\left(\frac{3}{4}(\xi - \eta)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}\right)+$$

$$+u_{\xi}\left(-\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{1}{3(\xi+\eta)}-\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{3}}}\right)+$$

$$+u_{\eta}\left(-\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{3}}}\right)=0.$$

Таким образом, окончательно каноническая форма исходного уравнения имеет вид:

$$\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}\right)+$$

$$+u_{\xi}\left(-\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{1}{3(\xi+\eta)}-\frac{2}{3(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}(\xi-\eta)^{\frac{1}{3}}}+\frac{\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{3}}}\right)+$$

$$+u_{\eta}\left(-\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{1}{3(\xi-\eta)}+\frac{2}{3(\xi-\eta)^{\frac{1}{3}}(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}}+\frac{\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(\frac{3}{4}(\xi-\eta)\right)^{\frac{2}{3}}}\right)=0.$$