# Тема: Вычисление обратной матрицы

ЗАДАНИЕ. *Найти матрицу, обратную матрице* $A$. *Сделать проверку.*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ:

Обратную матрицу найдем по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}^{T}$.

Сначала вычислим определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\left(-2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)+1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-\left(-2+1\right)=1\neq 0.$$

Найдем транспонированную матрицу алгебраических дополнений $\widetilde{A}^{T}$. Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2\ ,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=+2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=+2-1=1,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\left( 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = -2+1=-1,$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\left( -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = 1,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\left( -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = 1,$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Получаем

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}=\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&1&1\\0&-1&0&1\\-2&0&1&2\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. Вычислим произведение $A^{-1}\cdot A$:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&1&1\\0&-1&0&1\\-2&0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&1&0&0\\0&2&0&-1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+1+0-1&2+1-2-1&1+0+0-1&-1+0+1+0\\-1+0+0+1&-2+0+2+1&-1+0+0+1&1+0-1+0\\0-1+0+1&0-1+0+1&0+0+0+1&0+0+0+0\\-2+0+0+2&-4+0+2+2&-2+0+0+2&2+0-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E.$$