

Решение транспортной задачи методом потенциалов.

ЗАДАНИЕ. Из трех холодильников A_i , $i = \overline{1,3}$, вмещающих мороженную рыбу в количествах a_i т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_j , $j = \overline{1,5}$ в количествах b_j т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы $C = ((c_{ij}))$, 3×5 .

Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

$$\begin{array}{l}
 a_1=320, \quad b_2=140, \\
 a_2=280, \quad b_3=110, \\
 a_3=250, \quad b_4=230, \\
 b_1=150, \quad b_5=220
 \end{array}
 \quad C = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ. Составим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} - количество т рыбы, перевозимой из холодильника (поставщика) A_i в магазин (потребитель) B_j . Тогда задача заключается в минимизации общих транспортных расходов

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^5 x_{ij} = a_i, i = \overline{1,3}, \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Задача имеет закрытый тип, т.к. запасы груза $320+280+250 = 850$ т равны суммарным потребностям магазинов $150+140+110+230+220 = 850$ т.

Составим опорный план по правилу минимального элемента.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 0	23 0	20 0	15 0	24 0	320
A2	29 0	15 0	16 0	19 0	29 0	280
A3	6 0	11 0	10 0	9 0	8 0	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Введем некоторые обозначения: A_i^* - излишек нераспределенного груза от поставщика A_i , B_j^* - недостача в поставке груза потребителю B_j .

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,1). Помещаем туда меньшее из чисел $A_3^*=250$ и $B_1^*=150$.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,5). Помещаем туда меньшее из чисел $A_3^*=100$ и $B_5^*=220$.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,4). Помещаем туда меньшее из чисел $A_1^*=320$ и $B_4^*=230$.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,2). Помещаем туда меньшее из чисел $A_2^*=280$ и $B_2^*=140$.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3). Помещаем туда меньшее из чисел $A_2^*=140$ и $B_3^*=110$. Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,5). Помещаем туда меньшее из чисел $A_1^*=90$ и $B_5^*=120$.

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,5). Помещаем туда меньшее из чисел $A_2^*=30$ и $B_5^*=30$.

Пришли к таблице:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20	23	20	15 230	24 90	320
A2	29	15 140	16 110	19	29 30	280
A3	6 150	11	10	9	8 100	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Транспортные расходы составят:

$$z = 230 \cdot 15 + 90 \cdot 24 + 140 \cdot 15 + 110 \cdot 16 + 30 \cdot 29 + 150 \cdot 6 + 100 \cdot 8 = \mathbf{12040}.$$

Решим задачу методом потенциалов. Т.к. $m+n-1=7$ и имеем 7 загруженных клеток, план ациклический. Пусть U_i и V_j - потенциалы i -го склада и j -го магазина соответственно.

Полагая потенциал $U_1=0$, определяем остальные потенциалы из соотношения $U_i+V_j=C_{i,j}$, просматривая все занятые клетки. Получим:

$$U_1=0$$

$$V_4=C_{1,4}-U_1=15$$

$$V_5=C_{1,5}-U_1=24$$

$$U_2=C_{2,5}-V_5=5$$

$$U_3=C_{3,5}-V_5=-16$$

$$V_2=C_{2,2}-U_2=10$$

$$V_3=C_{2,3}-U_2=11$$

$$V_1=C_{3,1}-U_3=22$$

Для свободных клеток определим значения оценок (разностей между прямыми и косвенными тарифами).

$$S_{1,1} = C_{1,1} - (U_1 + V_1) = \mathbf{-2}.$$

$$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = \mathbf{13}.$$

$$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = \mathbf{9}.$$

$$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 2.$$

$$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -1.$$

$$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 17.$$

$$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 15.$$

$$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 10.$$

Имеем две клетки с отрицательными оценками – (1,1) и (2, 4). Выбираем клетку с наименьшей оценкой (1, 1) и строим для нее цикл.

Склад	Магазин					Запасы груза
	В1	В2	В3	В4	В5	
A1	+ 20	23	20	15	- 24	320
A2	29	140	110	19	29	280
A3	- 150	6	11	10	9	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 90 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

Склад	Магазин					Запасы груза
	В1	В2	В3	В4	В5	
A1	90	23	20	15	24	320
A2	29	140	110	19	30	280
A3	60	6	11	10	9	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы) $z = 11860$. Значение целевой функции изменилось на 180 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.

$$U_1=0$$

$$V_1=C_{1,1}-U_1= 20$$

$$V_4=C_{1,4}-U_1= 15$$

$$U_3=C_{3,1}-V_1=-14$$

$$V_5=C_{3,5}-U_3= 22$$

$$U_2=C_{2,5}-V_5=7$$

$$V_2=C_{2,2}-U_2= 8$$

$$V_3=C_{2,3}-U_2= 9$$

Определяем значения оценок $S_{i,j}=C_{i,j}-(U_i+V_j)$ для всех свободных клеток:

$$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 15.$$

$$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 11.$$

$$S_{1,5} = C_{1,5} - (U_1 + V_5) = 2.$$

$$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 2.$$

$$S_{2,4} = C_{2,4} - (U_2 + V_4) = -3.$$

$$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 17.$$

$$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 15.$$

$$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 8.$$

Имеем клетку (2, 4) с отрицательной оценкой, план не оптимален. Строим для этой клетки цикл.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	+ 20 90	23	20	- 15 230	24	320
A2	29	15 140	16 110	+ 19	- 29 30	280
A3	- 6 60	11	10	9	+ 8 190	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Перемещаем по циклу груз величиной в 30 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус". В результате перемещения по циклу получим новый план:

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 120	23	20	15 200	24	320
A2	29	15 140	16 110	19 30	29	280
A3	6 30	11	10	9	8 220	250
Потребность	150	140	110	230	220	

Целевая функция (транспортные расходы) $z = 11770$, значение уменьшилось на 90 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Проверим полученный план на оптимальность. Подсчитаем потенциалы.

$$U_1=0$$

$$V_1=C_{1,1}-U_1= 20$$

$$V_4=C_{1,4}-U_1= 15$$

$$U_2=C_{2,4}-V_4=4$$

$$U_3=C_{3,1}-V_1=-14$$

$$V_5 = C_{3,5} - U_3 = 22$$

$$V_2 = C_{2,2} - U_2 = 11$$

$$V_3 = C_{2,3} - U_2 = 12$$

Определяем значения оценок для всех свободных клеток:

$$S_{1,2} = C_{1,2} - (U_1 + V_2) = 12.$$

$$S_{1,3} = C_{1,3} - (U_1 + V_3) = 8.$$

$$S_{1,5} = C_{1,5} - (U_1 + V_5) = 2.$$

$$S_{2,1} = C_{2,1} - (U_2 + V_1) = 5.$$

$$S_{2,5} = C_{2,5} - (U_2 + V_5) = 3.$$

$$S_{3,2} = C_{3,2} - (U_3 + V_2) = 14.$$

$$S_{3,3} = C_{3,3} - (U_3 + V_3) = 12.$$

$$S_{3,4} = C_{3,4} - (U_3 + V_4) = 8.$$

Так как все оценки $S_{i,j} \geq 0$, то полученный план является оптимальным, минимальные транспортные расходы равны **11770**. Оптимальный план перевозок представлен ниже.

Склад	Магазин					Запасы груза
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	20 120	23	20	15 200	24	320
A2	29	15 140	16 110	19 30	29	280
A3	6 30	11	10	9	8 220	250
Потребность	150	140	110	230	220	