Тема: Интеграл с помощью теоремы Коши

Задание. *Вычислить контурный интеграл с помощью основной теоремы Коши о вычетах:*

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz$$

Решение.

$|z+1|=2$ - точки, лежащие на окружности с центром (-1;0) и радиусом, равным 2.

Особые точки функции: $0; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}+\pi k, k=\pm1;\pm2,...$ (точки, в которых знаменатель равен нулю, тангенс существует).

Внутри окружности находятся следующие точки 0; $-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}$ (в них будем считать вычеты).

По теореме Коши о вычетах интеграл можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z}dz = 2\pi i\left(rez_0 \frac{tgz+2}{4z^2+\pi z} + res_{-\frac{\pi}{4}} \frac{tgz+2}{4z^2+\pi z} + res_{-\frac{\pi}{2}} \frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}\right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} (4z^2+\pi z)' = 8z+\pi \\ tgz+2 = \dfrac{\sin z}{\cos z}+2 = \dfrac{\sin z+2\cos z}{\cos z} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\operatorname{tg} z+2}{8z\ +\pi}\ \Big|_{z=0} + \frac{\operatorname{tg} z+2}{8z+\pi}\ \Big|_{z=-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin z+2\cos z}{(4z^2+\pi z)(\cos z)'}\ \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{-\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) = 4i - 2i - \frac{4i}{\pi} = 2i - \frac{4i}{\pi}.$$

Ответ: $2i - \frac{4i}{\pi}$