Тема: Теория функций комплексной переменной

Задание. *Найти все значения корней из заданного комплексного числа.*
$\sqrt[4]{-9}$

Решение:
Сначала запишем данное число $z=-9$ в тригонометрическом виде
$z=-9=9(-1+0i)=9(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$.

Тогда получим 4 корня $w_{0,1,2,3}=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{-9}$, которые можно найти по формуле:

$$w_k=\sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)\right),\ k=0,1,2,3.$$

Получаем:

$$w_0=\sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$w_1=\sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$w_2=\sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$w_3=\sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$