Тема: Теория функций комплексной переменной

Задание. *Показать, что данные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ гармонические. Найти по заданной функции $u(x,y)$ или $v(x,y)$ ей сопряженную.*

$$u(x,y)=\cos x \mathrm{ch} y, \quad v(0,0)=0.$$

Решение. Проверим, что функция $u(x,y)$ гармоническая:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x \mathrm{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\cos x \mathrm{sh} y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos x \mathrm{ch} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x \mathrm{ch} y.$$

Тогда

$$\Delta=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\cos x \mathrm{ch} y+\cos x \mathrm{ch} y \equiv 0,$$

то есть функция $u(x,y)$ - гармоническая. Найдем сопряженную к ней функцию $v(x,y)$ из условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x \mathrm{ch} y,$$

$$v(x,y)=-\int \sin x \mathrm{ch} y dy+f(x)=-\sin x \mathrm{sh} y+f(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\cos x \mathrm{sh} y+f'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\cos x \mathrm{sh} y,$$

$$\Rightarrow f'(x)=0, f(x)=C-const, \quad v(x,y)=-\sin x \mathrm{sh} y+C$$

Из начального условия получаем

$$v(0,0)=-\sin 0 \mathrm{sh} 0+C=C=0, \Rightarrow v(x,y)=-\sin x \mathrm{sh} y.$$