Доказательство неравенства методом математической индукции

Задание. *Доказать неравенство:*

$$2!4!...(2n)! > [(n+1)!]^n \quad (n \ge 2).$$

Доказательство.

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 2$. Тогда исходное неравенство примет вид:

$2!4! > [3!]^2$;

$2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [3 \cdot 2 \cdot 1]^2$;

$48 > 36$.

Как мы видим, при $n = 2$ исходное неравенство выполняется.

Предположим, что для произвольного натурального числа k ($k > 2$) исходное неравенство является верным, то есть,

$$2!4!...(2k)! > [(k+1)!]^k \quad (k > 2)$$

Покажем, что в этом случае неравенство выполняется и для числа $k + 1$. То есть, докажем неравенство

$$2!4!...(2k)!(2(k+1))! > [(k+2)!]^{k+1}.$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$[(k+2)(k+1)!]^{k+1} = (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^{k+1} = (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^k (k+1)!.$$

Неравенство, которое требуется доказать, примет вид:

$$2!4!...(2k)!(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^k (k+1)!.$$

Поскольку $2!4!...(2k)! > [(k+1)!]^k$, то задача сводится к доказательству неравенства:

$$(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}(k+1)!.$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства:

$$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)(k+1)!.$$

Поскольку выражение $(2k+2)(2k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)$ содержит $k+1$ множителей, наименьший из которых равен k + 2, то

$$(2k+2)(2k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+2) > (k+2)^{k+1}.$$

Отсюда следует, что

$$(2k+2)(2k+1)2k(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)(k+1)! > (k+2)^{k+1}(k+1)!,$$

или

$$(2k+2)! > (k+2)^{k+1}(k+1)!.$$

Таким образом, неравенство $(2k+2)! > (k+2)^{k+1}(k+1)!$, а следовательно, и неравенство

$$2!4!\ldots(2k)!(2(k+1))! > (k+2)^{k+1}[(k+1)!]^{k}(k+1)!$$

выполнено. Значит, исходное неравенство имеет место для любого натурального числа n, не равного 1. Что и требовалось доказать.