

Задача по математической логике с решением

Задача. Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$(X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z)).$$

Решение. Используем алгоритм редукции.

Положим, что формула $\varphi = (X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z))$ принимает ложное значение на некотором наборе переменных (X, Y, Z) , тогда $(X \rightarrow Z) = 1$ и $((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z)) = 0$. (1)

Так как $((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z)) = 0$, то $(Y \rightarrow Z) = 1$ и $(X \vee Y) \rightarrow Z = 0$. (2)

Так как $((X \vee Y) \rightarrow Z) = 0$, то $(X \vee Y) = 1$ и $Z = 0$. (3)

Получили, что $Z = 0$. Тогда, так как $(X \rightarrow Z) = 1$, $(Y \rightarrow Z) = 1$, то $X = Y = 0$. Но тогда не выполняется условие $(X \vee Y) = 1$, то есть наше предположение неверно.

Формула доказуема.