

Бином Ньютона

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Сколько членов разложения $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x)^{20}$ имеют рациональные коэффициенты при x ? Найти эти коэффициенты.

Решение. Используем бином Ньютона:

$$(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (\sqrt[3]{3})^k (\sqrt{2}x)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot 3^{k/3} \cdot 2^{10-k/2} \cdot x^{20-k}.$$

Коэффициенты будут рациональными, если $k/3$ - целое и $10 - k/2$ - целое одновременно, то есть если k делится нацело на 6. Таких значений четыре: $k = 0$, $k = 6$, $k = 12$ и $k = 18$.

Найдем соответствующие коэффициенты по формуле $a_k = C_{20}^k \cdot 3^{k/3} \cdot 2^{10-k/2}$.

- 1) $k = 0$, коэффициент при x^{20} равен $a_0 = C_{20}^0 \cdot 3^0 \cdot 2^{10} = 1024$.
- 2) $k = 6$, коэффициент при x^{14} равен $a_6 = C_{20}^6 \cdot 3^2 \cdot 2^7 = 44651520$.
- 3) $k = 12$, коэффициент при x^8 равен $a_{12} = C_{20}^{12} \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 163257120$.
- 4) $k = 18$, коэффициент при x^2 равен $a_{18} = C_{20}^{18} \cdot 3^6 \cdot 2^1 = 277020$.