Линейность отображений. Матрица оператора

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Установить, являются ли заданные отображения $A: R^4 \to R^4$ линейными. В случае линейности отображения записать матрицу оператора A в каноническом базисе* $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$.

а) $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$;

б) $Ax=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$.

Решение

По условию, пространство R^4 отображается в пространство R^4, следовательно, для любых элементов (векторов) этого пространства $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ и произвольного числа λ, введены операции сложения и умножения на число: $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$, $\lambda x=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$.

а) Если $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$, то:

$Ax=(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$,

$Ay=(y_1;y_2;y_3;y_4)=(y_1-2y_4;y_2+y_3;-y_1;y_1+3y_2)$.

Проверим выполнение условий линейности отображения:

1)

$$A(x+y)=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3;x_4+y_4)=$$
$$((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);(x_2+y_2)+(x_3+y_3);-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))=$$
$$=((x_1+y_1-2x_4-2y_4);(x_2+y_2+x_3+y_3);(-x_1-y_1);(x_1+y_1+3x_2+3y_2))=$$
$$=((x_1-2x_4+y_1-2y_4);(x_2+x_3+y_2+y_3);(-x_1-y_1);(x_1+3x_2+y_1+3y_2))=$$
$$=((x_1-2x_4)+(y_1-2y_4);(x_2+x_3)+(y_2+y_3);(-x_1)+(-y_1);(x_1+3x_2)+(y_1+3y_2))=Ax+Ay$$

$A(x+y)=$ $Ax+Ay$ равны, следовательно, первое условие линейности отображения выполняется.

2) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\lambda x_2;\lambda x_3;\lambda x_4)=(\lambda x_1-2\lambda x_4;\lambda x_2+\lambda x_3;-\lambda x_1;\lambda x_1+3\lambda x_2)=$
$=(\lambda(x_1-2x_4);\lambda(x_2+x_3);-\lambda x_1;\lambda(x_1+3x_2))=$
$\lambda(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)=\lambda Ax$, следовательно, второе условие линейности отображения тоже выполняется.

Таким образом, отображение $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$ является линейным оператором.

Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $e_1=(1;0;0;0)$, $e_2=(0;1;0;0)$, $e_3=(0;0;1;0)$, $e_4=(0;0;0;1)$.

В силу линейности оператора для произвольного $x=(x_1;x_2;x_3;x_4)$:

$$Ax=(x_1e_1;x_2e_2;x_3e_3;x_4e_4)=A(x_1e_1)+A(x_2e_2)+A(x_3e_3)+A(x_4e_4)=$$
$$=x_1A(e_1)+x_2A(e_2)+x_3A(e_3)+x_4A(e_4)=$$
$$=x_1A(1;0;0;0)+x_2A(0;1;0;0)+x_3A(0;0;1;0)+x_4A(0;0;0;1)$$

Для заданного преобразования:

$$A(e_1)=(1;0;-1;1;);\quad A(e_2)=(0;1;0;3);\quad A(e_3)=(0;1;0;0);\quad A(e_4)=(-2;0;0;0)$$

Преобразованный вектор Ax имеет в стандартном базисе координаты

$$Ax=x_1(1;0;-1;1)+x_2(0;1;0;3)+x_3(0;1;0;0)+x_4(-2;0;0;0)=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$$

Такому оператору соответствует матрица $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&1&0\\-1&0&0&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}$, т.к.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&1&0\\-1&0&0&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_4\\x_2+x_3\\-x_1\\x_1+3x_2\end{pmatrix},$$

б) Проверим выполнение условий линейности отображения $Ax=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$.

Т.к. $Ax=A(x_1;x_2;x_3;x_3)=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$,

$Ay=A(y_1;y_2;y_3;y_3)=(y_1-2y_4;y_2\cdot y_3;-y_1;y_1+3y_2)$, то

$$A(x+y)=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3;x_4+y_4)=$$
$$=((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);(x_2+y_2)\cdot(x_3+y_3);-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))=$$
$$=((x_1+y_1-2x_4-2y_4);(x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3);(-x_1-y_1);(x_1+y_1+3x_2+3y_2))=$$
$$=((x_1-2x_4)+(y_1-2y_4);\underline{(x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3)};(-x_1)+(-y_1);(x_1+3x_2)+(y_1+3y_2))$$

$$Ax+Ay=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)+(y_1-2y_4;y_2\cdot y_3;-y_1;y_1+3y_2)=$$
$$=(x_1-2x_4+y_1-2y_4;x_2x_3+y_2y_3;-x_1-y_1;x_1+3x_3+y_1+3y_2)=$$
$$((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);\underline{(x_2x_3+y_2y_3)};-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))$$

Третьи координаты векторов $A(x+y)$ и $Ax+Ay$ не равны: $x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3\neq x_2x_3+y_2y_3$; следовательно, $A(x+y)\neq Ax+Ay$, то есть рассмотренное отображение не является линейным.

Ответ.

а) отображение является линейным; $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) отображение не является линейным.