Аналитическая геометрия. Кривые 2-го порядка
Пример решения задачи

Задача. *Дана кривая* $5x^2+5y^2+6xy-16x-16y=16$.

1. Докажите, что эта кривая – эллипс.

2. Найдите координаты центра его симметрии.

3. Найдите его большую и малую полуоси.

4. Запишите уравнение фокальной оси.

5. Постройте данную кривую.

Решение. Приведем соответствующую основной части уравнения $B(x,y)=5x^2+5y^2+6xy$ квадратичную форму к главным осям. Запишем матрицу: $B=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$. Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)^2-9=(5-\lambda-3)(5-\lambda+3)=(2-\lambda)(8-\lambda)=0.$$

Получили $\lambda_1=2,\ \lambda_2=8$.

Собственные числа одинаковых знаков, значит, данное уравнение определяет эллипс.

Найдем соответствующие собственные вектора единичной длины.

Пусть $\lambda_1=2$, получим:

$$\begin{cases}3x+3y=0,\\ 3x+3y=0,\end{cases}\Rightarrow x=-y,\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ j_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_2=8$, получим:

$$\begin{cases}-3x+3y=0,\\ 3x-3y=0,\end{cases}\Rightarrow x=y,\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ j_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода имеет вид: $Q=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, тогда

$$Q^{-1}=Q^{T}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Старые координаты (x,y) связаны с новыми (x_1,y_1) соотношениями

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=Q^{T}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

То есть

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y, \\ y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y. \end{cases}$$

Подставляем и получаем уравнение в новых координатах:

$$5x^2+5y^2+6xy-16x-16y=16,$$

$$5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)^2+5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)^2+6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)-$$

$$-16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)-16\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)=16,$$

$$2x_1^2+8y_1^2-16\sqrt{2}y_1=16,$$

$$x_1^2+4y_1^2-8\sqrt{2}y_1=8,$$

$$x_1^2+4\left(y_1^2-2\sqrt{2}y_1\right)=8,$$

$$x_1^2+4\left(y_1^2-2\sqrt{2}y_1+2\right)=8+8,$$

$$x_1^2+4\left(y_1-\sqrt{2}\right)^2=16,$$

$$\frac{x_1^2}{16}+\frac{\left(y_1-\sqrt{2}\right)^2}{4}=1.$$

Если обозначить $\begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 - \sqrt{2}. \end{cases}$ получим каноническое уравнение эллипса:

$\frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1$ или $\frac{x_2^2}{4^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$.

Координаты центра его симметрии:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 = 0, \\ y_2 = y_1 - \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Получили $A(1;1)$.

Полуоси эллипса равны $a = 4,\ b = 2$.

Запишем уравнение фокальной оси

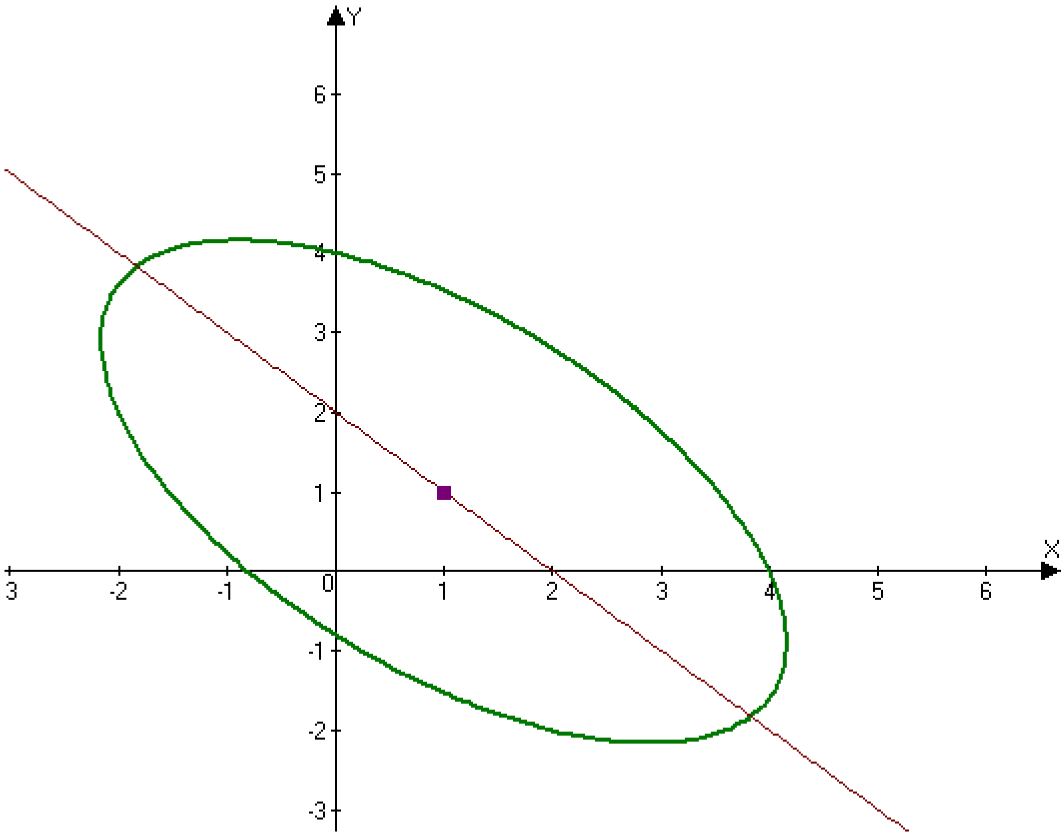
$$y_2 = y_1 - \sqrt{2} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y = \sqrt{2},$$

$$x + y = 2,$$

$$y = 2 - x.$$

Построим данную кривую.



Зеленым – эллипс, коричневым – фокальная ось. Точка – центр симметрии эллипса.