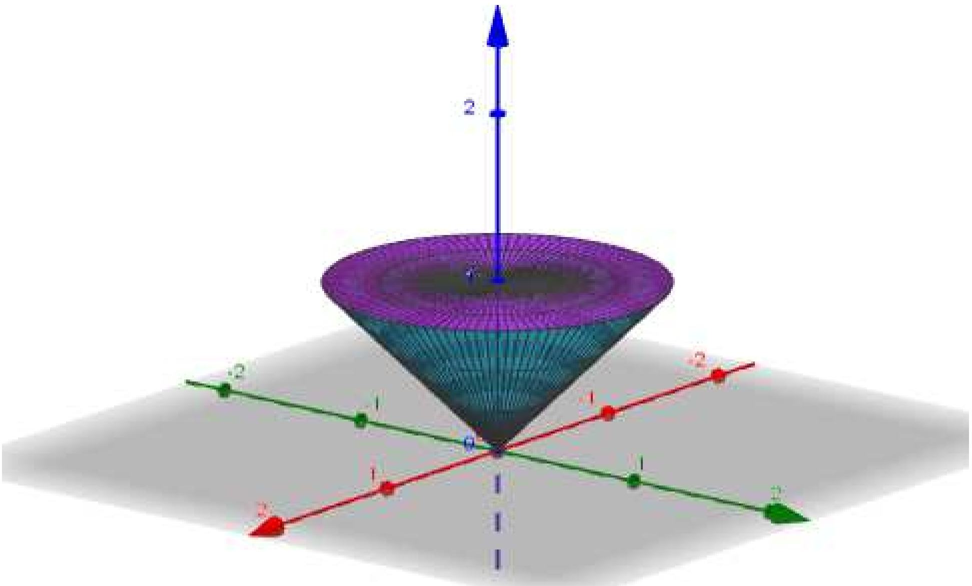
Теория поля
Нахождение потока векторного поля непосредственно и по формуле Остроградского-Гаусса

Задание.

Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x + xy^2)\bar{\imath} + (y - yx^2)\bar{\jmath} + (z-3)\bar{k}$ *через часть поверхности* $S: x^2 + y^2 = z^2 \ (z \geq 0)$, *вырезанную плоскостью* $P: z = 1$ *непосредственно и с помощью формулы Гаусса-Остроградского (нормаль внешняя к замкнутой поверхности).*

Решение.

В задании указано «через часть поверхности S», но формула Остроградского-Гаусса применима только для замкнутой поверхности. Будем искать поток через всю поверхность, образованную частью поверхности S и плоскости P.



Найдем поток через часть поверхности конуса.

Поле единичных нормалей к поверхности $S: F = x^2 + y^2 - z^2 = 0$:

$$\bar{n} = \pm\frac{grad\ F}{|grad\ F|} = \pm\frac{(2x; 2y; -2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}$$

$$= \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Так как нормали должны образовывать тупой угол с осью Oz, выбираем знак «+».

$$\bar{n}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Найдем скалярное произведение:

$$\bar{a}\bar{n}=(x+xy^2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+(y-yx^2)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+(z-3)\cdot\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$=\frac{x^2+x^2y^2+y^2-x^2y^2-z(z-3)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x^2+y^2-z^2+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Поток определяется как поверхностный интеграл:

$$\Pi_1=\iint_S\bar{a}\bar{n}\,ds=\iint_S\frac{x^2+y^2-z^2+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds$$

Перейдем от поверхностного интеграла к двойному, проецируя $S: x^2+y^2-z^2=0, 0\le z\le 1$ на Oxy:

$$z=\sqrt{x^2+y^2};\ \ z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

Проекция S на Oxy: $x^2+y^2\le 1$. Получим:

$$\Pi_1=\iint_S\frac{x^2+y^2-z^2+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{x^2+y^2-(x^2+y^2)+3\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}}\sqrt{2}dxdy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}dxdy=3\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=3S_{\text{кр}}=3\cdot\pi\cdot 1^2=3\pi$$

Найдем поток через часть плоскости.

Поле единичных нормалей к поверхности $P: z=1$

$$\bar{n}=\pm\frac{grad\ F}{|grad\ F|}=\pm(0;0;1)$$

Так как нормали должны быть сонаправлены с осью Oz, выбираем знак «+».

$$\bar{n}=(0;0;1)$$

Найдем скалярное произведение:

$$\bar{a}\bar{n}=(x+xy^2)\cdot 0+(y-yx^2)\cdot 0+(z-3)\cdot 1=z-3$$

Поток определяется как поверхностный интеграл:

$$\Pi_2=\iint_P \bar{a}\bar{n}\,ds=\iint_P (z-3)\,ds$$

Перейдем от поверхностного интеграла к двойному, проецируя $P: z=1, x^2+y^2\le 1$ на Oxy:

$$\Pi_2=\iint_P (z-3)\,ds=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-3)dxdy=-2\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-2S_{\text{кр}}$$

$$=-2\cdot\pi\cdot 1^2=-2\pi$$

Поток через полную поверхность равен:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=3\pi-2\pi=\pi$$

Найдем дивергенцию $\bar{a}$:

$$div\,\bar{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(x+xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y-yx^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z-3)=$$

$$=1+y^2+1-x^2+1=3-x^2+y^2$$

По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\Pi=\iiint_V div\,a\,dv=\iiint_V (3-x^2+y^2)\,dv,$$

где тело V ограничено заданной поверхностью S.

$$V:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$$

Переходя к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

получим:

$$V:\begin{cases}r\le z\le 1\\ 0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases};dxdydz=rdzdrd\varphi$$

$$\Pi=\iiint_V (3-x^2+y^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_r^1 r(3-r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\big(3-r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\big)(1-r)dr$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3-r^2\cos 2\varphi)(r-r^2)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3r-3r^2-r^3\cos 2\varphi+r^4\cos 2\varphi)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3r^2}{2}-r^3-\frac{1}{4}r^4\cos 2\varphi+\frac{1}{5}r^5\cos 2\varphi\,\Bigg|_0^1\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{40}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi-\frac{1}{40}\sin 4\pi=\pi$$

Ответ. $\Pi=\pi$.