(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример решения задачи: Вычисление площади фигуры в полярных координатах

Задание.

Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$y^2 - 6y + x^2 = 0,$$

$$y = \sqrt{3}x, x = 0.$$

Решение.

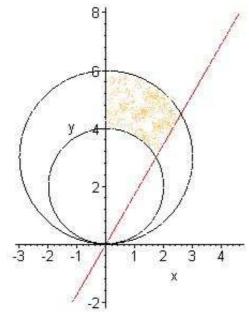
Сделаем чертеж фигуры.

$$y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

 $(y-2)^2 + x^2 = 2^2$ - окружность с центром (0,2) радиуса 2.

$$y^2 - 6y + x^2 = 0$$
, $(y-3)^2 + x^2 = 3^2$ - окружность с центром (0,3) радиуса 3.

$$y = \sqrt{3}x, x = 0.$$
 - прямые.



Нужная область закрашена на чертеже.

Перейдем к полярным координатам:

Решение задачи по двойным интегралам скачано с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=ma2int

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда $dxdy = rdrd\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Найдем ограничения.

Полярный угол меняется от $\varphi = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Полярный радиус:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$
,

$$r^2 - 4r\sin\varphi = 0,$$

$$r(r-4\sin\varphi)=0,$$

$$0 \le r \le 4 \sin \varphi$$
.

$$x^2 + y^2 - 6y = 0,$$

$$r^2 - 6r \sin \varphi = 0$$

$$r(r-6\sin\varphi)=0,$$

$$0 \le r \le 6 \sin \varphi$$
.

Итого $4\sin\varphi \le r \le 6\sin\varphi$.

Получаем, что

$$S = \iint_{G} f(x, y) dx dy = \iint_{G} r dr d\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{6\sin\varphi} r dr = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{2} r^{2} \Big|_{4\sin\varphi}^{6\sin\varphi} = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(36\sin^{2}\varphi - 16\sin^{2}\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 10 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^{2}\varphi d\varphi = 5 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 - \cos 2\varphi\right) d\varphi = 5 \left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 5 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{6} + \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$